202 - Exemples de Parties denses et applications

I Définitions et premiers exemples : (E,d) espaces métriques

Définitions : • Soit $A \subset E$, l'adhérence de A dans E est le plus petit fermé de E contenant A. On le note $\overline{A}^E$ ou $\overline{A}$.
• A est dit dense dans E si $\overline{A} = E$

Caractérisations : Sont équivalents : [GOU1]
(i) A est dense dans E
(ii) Tout point de E est limite d'une suite de points de A
(iii) $E \setminus A$ est d'intérieur vide
(iv) Tout ouvert non vide de E rencontre A

① Exemples sur $\mathbb{R}$: [GOU1]

Proposition : A dense dans $\mathbb{R} \iff \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a<b, \ ]a,b[\cap A \neq \emptyset$
↳ exemple : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$

Application : Il existe un unique morphisme continu f de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{R},+)$ (resp. $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$) tel que $f(1) = \lambda$ (resp $f(1) = e^\lambda$), $\lambda \in \mathbb{R}$.
De plus : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda x$ (resp $f(x) = e^{\lambda x}$).

Proposition : Tout sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ est soit de la forme $a\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$, soit dense dans $\mathbb{R}$.

Application : * $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ dense dans $\mathbb{R} \iff \frac{a}{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
* $\{e^{2in\theta\pi}, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{U} \iff \theta \notin \mathbb{Q}$
* $\{\cos(nx), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1] \iff \frac{x}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

② Exemples en algèbre linéaire : [GOU1,2] [OA] [ROUV]

Propositions : * $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
* $D_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$
* $\overline{D_n(\mathbb{R})} = T_n(\mathbb{R})$, ensemble des matrices trigonalisables sur $\mathbb{R}$.

Applications : * $\forall A,B \in M_n(\mathbb{K})$: $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ et $\chi_A(A) = 0$
* la différentielle du déterminant est : $D(\det)X : H \longmapsto \mathrm{tr}({}^t\mathrm{Com}(X) \cdot H)$
* l'application $M \longmapsto D_M$, où D_M est la partie diagonalisable de M dans la décomposition de Dunford, n'est pas continue.

Proposition : Soient E un espace vectoriel et H un hyperplan de E.
Alors H est dense ou fermé dans E.

Proposition : Soit $f \in E^*$: $H = \ker f$ dense dans $E \iff f$ non C^0

II Séparabilité et densité sur les espaces de fonctions :

Définition : E est dit séparable s'il existe $D \subset E$ dénombrable dense.

Exemples : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}[X]$ sont séparables. Tout compact $K \subset E$ est séparable. L^∞ n'est pas séparable.

① Stone-Weierstrass et applications : [TISS]

Définition : $A \subset \mathcal{C}(E,\mathbb{K})$ est séparante si
$\forall (x,y) \in E^2$, $x \neq y \Rightarrow \exists f \in A$ tq $f(x) \neq f(y)$

Théorème : * cas réel : Soit E compact, alors toute sous-algèbre A de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$.
* cas complexe : Si de plus on a $f \in A \Rightarrow \overline{f} \in A$, alors A est dense dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{C})$.

DEV

Contre-exemple : Si on ne suppose pas $f \in A \Rightarrow \overline{f} \in A$, le résultat est faux. Considérer $\mathbb{C}[X]$ vu comme sous-algèbre de $\mathcal{C}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

Théorème de Weierstrass : $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Application : * $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ est séparable
* Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0$, Alors $f \equiv 0$.

Théorème : Les polygônes trigonométriques sont denses dans $\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et 2π-périodiques$\}$.

② Densité dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$: [BRE] [RUD]

Théorème : $S = \{\phi$ fonctions étagées, mesurables telles que $\mu(\{x : \phi(x) \neq 0\}) < +\infty\}$

* $1 \leq p < +\infty$: S est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$
* L'ensemble des fonctions étagées est dense dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$

Proposition : * $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ $\forall p \in [1, +\infty[$.

* $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ $\forall p \in [1, +\infty[$.

Application : * $\forall p \in [1, +\infty[$, $L^p(\mathbb{R}^d)$ est séparable.

* Lemme de Riemann-Lebesgue : $\forall f \in L^1$, $\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t}\, dt \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$
* $L^p \cap L^q$ est dense dans L^q.

En particulier $L^1 \cap L^2$ dense dans L^2 (cf transformée de Fourier)

③ Théorèmes de prolongement : [GOU1] [ZQ]

Théorème : Soit A dense dans E, $f : A \to F$ uniformément continue sur A. On suppose F complet, alors $\exists ! g : E \to F$ tq $\begin{cases} g_{|A} = f \\ g \text{ uniformément continue sur } E \end{cases}$

a/ Application au complété d'un espace métrique :

Proposition : Soit (E,d) métrique, il existe un espace $(\hat{E}, \hat{d})$ complet et $i : E \to \hat{E}$ une isométrie injective tel que $i(E)$ est dense dans $\hat{E}$.

$(\hat{E}, \hat{d})$ est appelé complété de (E,d).

Le théorème de prolongement ci-dessus nous donne l'unicité du complété au sens suivant :

Proposition : Si (E_1, d_1) et (E_2, d_2) sont des complétés de (E,d) avec les injections isométriques $i_1 : E \to E_1$ et $i_2 : E \to E_2$, alors il existe $\varphi : E_1 \to E_2$ isométrie bijective telle que $\varphi \circ i_1 = i_2$.

b/ Autres applications :

* **Proposition :** Une fonction $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable dont la dérivée est bornée et admet une limite en a^+, se prolonge sur $[a,b]$ en fonction dérivable
* Construction de l'intégrale de Riemann pour les fonctions en escalier, que l'on étend aux fonctions réglées (limite uniforme de fonctions en escalier).
* **Théorème :** Fourier - Plancherel

La transformée de Fourier $\mathcal{F} : \begin{cases} L^1 \cap L^2 \to L^2 \\ f \longmapsto \hat{f} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \end{cases}$

se prolonge en une isométrie $\tilde{\mathcal{F}}$, qui est alors un isomorphisme de L^2.

III Espaces de Hilbert et espaces de Baire :

① Espaces de Hilbert : [OA] $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace de Hilbert

Proposition : Soit F un sev de E, alors $E = \overline{F} \oplus F^\perp$, et ainsi :

$$F \text{ dense dans } E \iff F^\perp = \{0\}$$

Définition : On dit que $D \subset E$ est total si $\overline{\mathrm{Vect}(D)} = E$

Définition : $(e_i)_{i \in I}$ est dite base hilbertienne de E si elle est orthonormée et totale.

Proposition : Sont équivalents.

* $(e_i)_{i \in I}$ base hilbertienne
* $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$
* $\forall x, y \in E$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$

Exemple : Série de Fourier :

$L^2([-\pi, \pi])$ muni de $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)}\, dt$, $e_m(x) = e^{imx}$,

$c_m(f) = \langle f, e_m \rangle$, $S_m(f) = \sum_{k=-m}^{m} c_k(f) e_k$

Proposition : $\| S_m(f) - f \|_2 \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$.

Corollaire : $(e_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2([-\pi, \pi])$.

Egalité de Parseval: $\forall f \in L^2([-\pi,\pi])$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$

② **Polynômes orthogonaux:** [OA]

Définitions: Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle. On appelle poids toute fonction $w : I \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n w(x)\,dx < +\infty$

On note $L^2(I,w)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité w par rapport à la mesure de Lebesgue.

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire suivant:

$\langle f,g\rangle = \int_I f(x)g(x)w(x)\,dx$

En orthonormalisant la famille $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ on obtient une famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux tels que $d°(P_n) = n$

Théorème: Si il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}w(x)dx < +\infty$, alors la famille des polynômes orthogonaux associés à w est une base hilbertienne de $L^2(I,w)$.

Exemples: * $I = \mathbb{R}$, $w(x) = e^{-x^2}$, $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$

(P_n), polynômes de Hermite, est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R},w)$

* $I = [-1,1]$, $\rho(x) = 1$, $P_n(x) = \frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$

(P_n), polynômes de Legendre, est une base hilbertienne de $L^2([-1,1],w)$

③ **Espaces de Baire:** [GOU1] [ZQ]

Définition: E est un espace de Baire si toute intersection dénombrable d'ouverts denses reste dense dans E. Ou de façon équivalente si toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vide reste d'intérieur vide.

Exemple: Tout espace complet est de Baire.

Applications:

- Tout espace vectoriel normé admettant une base dénombrable infinie n'est pas complet.

  exemple: $\mathbb{R}[X]$ n'est complet pour aucune norme.

- **Définition:** Soient (E,d) un $\mathbb{C}$ espace vectoriel métrique complet séparable, et $A \in L(E)$ continue. On dit que A est hyper-cyclique s'il existe $x \in E$ tq $\{A^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans E

  Critère de Kitaï: S'il existe X, Y denses dans E, et une application B de Y dans Y vérifiant: i) $\forall x \in X$, $A^n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
  ii) $\forall y \in Y$, $B^n(y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
  Alors A est hypercyclique iii) $\forall y \in Y$, $AB(y) = y$

- **Théorème de Banach-Steinhaus:**

  Soient E et F deux evn. On munit $\mathcal{L}_c(E,F)$ de la norme induite. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{L}_c(E,F)$.

  Si: $\forall x \in E$ $\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < +\infty$, Alors $\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} < +\infty$

  Application: $\exists f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ dont la série de Fourier diverge en 0.

- Il n'existe pas de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
- Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x > 0$ $f(nx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

  Alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. L'ensemble des points de continuité de f' est dense dans $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des fonctions continues et nulle part dérivables est dense dans $C([0,1],\mathbb{R})$.
- Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $\varphi^{(n)}(x) = 0$

  Alors φ est un polynôme sur $\mathbb{R}$.