(1)

[201] Espaces de fonctions. Exemples et applications

[HL] Hirsch Lacombe
[Gou] Gourdon Analyse
[Pom] Pommellet
[Rud] Rudin Analyse Réelle et complexe
[Bre] Brézis
[Ob] Objectif Agreg
[Zuily] Zuily éléments de distributions...
[Wil] Willem Analyse fonctionnelle
[Kol] Kolmogorov

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, (X, d) un espace métrique

I. Espace des fonctions continues $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$

① Premières propriétés

[HL] **Prop**: $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ est une algèbre unitaire commutative. Si X est compact alors $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ est un espace de Banach pour la norme uniforme sur X notée $\|.\|$ et définie par $\|f\| = \max |f(x)|$

~~Pour toute~~ la suite X est compact.

[Gou] **Théorème de prolongement**: Soit Y une partie de X partout dense dans X et $f \in \mathcal{C}(Y, \mathbb{K})$ (plus généralement $\mathcal{C}(Y, E)$ avec $(E, \tilde{d})$ métrique complet) uniformément continue. Alors il existe une application $g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ (ou $\mathcal{C}(X, E)$) telle que $g_{|Y} = f$. De plus g est uniformément continue.

Application: Intégrale de Riemann des fonctions réglées de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ à partir de la densité des fonctions en escalier

② Parties denses

[Gou] **Thm**: l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

[HL] **Déf**: $A \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ est séparante si $\forall (x,y) \in E^2$, $x \neq y$ $\Rightarrow \exists f \in A$ tq $f(x) \neq f(y)$.

Thm (Stone-Weierstrass): * cas réel. Toute sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ séparante et contenant les constantes est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$

* cas complexe: Toute sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ séparante, auto-conjuguée et qui contient les constantes est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$

DVP [Pom] **Applications**: • les fonctions polynômes sont denses dans $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$

↳ Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ telle que $\int_a^b f(t) t^n dt = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors f est nulle.

• les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}_{2\pi}([0,1], \mathbb{C})$

③ Parties compactes

[HL] **Déf**: Une partie H de $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ est dite équicontinue en un point $x_0 \in X$ si elle satisfait la condition: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, d(x, x_0) < \eta \Rightarrow \forall h \in H, |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$

Thm d'Ascoli: Soit (X, d) un espace métrique compact. Une partie de $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ si et seulement si elle est bornée et équicontinue

Applications: ⓐ **Prop**: Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ telle que $\exists M \geq 0$, $\exists x_0 \in [0,1]$, $\forall n \geq 0, \forall x \in [0,1]$ $|f_n'(x)| \leq M$ et $|f_n(x_0)| \leq M$. Alors on peut extraire de (f_n) une sous-suite qui converge uniformément.

ⓑ **Prop**: Tout sous-espace fermé de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ inclus dans $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ est de dimension finie

ⓒ Un exemple d'opérateur compact. Soit $k \in \mathcal{C}([0,1]^2)$. On définit $K : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$
$f \longmapsto (x \longmapsto \int_0^1 k(x,y) f(y) dy)$

K est un opérateur compact.

[Rud] ⓓ **Théorème de Montel**. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω

Thm: Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$. Si $\mathcal{F}$ est uniformément bornée sur tout compact inclus dans Ω. Alors $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $\mathcal{H}(\Omega)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact

ⓔ Dans les L^p: le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov (énoncé plus bas)

II. Espaces des fonctions intégrables

[Bre]

① Définitions et premiers résultats

Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx. On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrable sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ quotienté par la relation d'égalité presque partout. On pose

$$\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)| dx$$

Thm (Beppo Levi) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions L^1 telles que $\sup_n \int f_n < \infty$. Alors $f_n(x)$ converge pp sur Ω vers une limite finie $f(x)$. De plus $f \in L^1$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$

Thm (convergence dominée): Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1. On suppose que
(i) $f_n(x) \to f(x)$ pp sur Ω
(ii) il existe une fonction $g \in L^1$ telle que $\forall n, |f_n(x)| \leq g(x)$ pp sur Ω
Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$

Def. Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$; on pose
$L^p(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega) \}$
on note $\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$
on pose
$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable et } \exists C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ pp sur } \Omega \}$
on note $\|f\|_{L^\infty} = \inf \{ C ;\ |f(x)| \leq C \text{ pp sur } \Omega \}$

Thm (Inégalité de Hölder). Soient $f \in L^p$, $g \in L^{p'}$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et p' est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (exposant conjugué)
Alors $f \cdot g \in L^1$ et $\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$.

Thm: L^p est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme pour tout $1 \leq p \leq \infty$

Thm (Fischer Riesz): L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$

② Convolution. Régularisation. Résultats de densité et compacité

Thm L'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$

Thm: Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$
Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$. On pose
$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$
Alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\|f*g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$

Prop / Def (Support) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit f une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère la famille de tous les ouverts (ω_i), $\omega_i \subset \Omega$ tq $\forall i \in I$, $f = 0$ pp sur ω_i. $\omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i$. Alors $f = 0$ pp sur ω. On pose $\operatorname{supp} f = \Omega \setminus \omega$

Prop - Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ Alors
$\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}$

Prop: Soient $f \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (k entier) Alors $f * g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ et $D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f) * g$.

Def: On appelle suite régularisante toute suite (ρ_n) de fonctions telles que
$\rho_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \rho_n \subset B(0, \frac{1}{n})$, $\int \rho_n = 1$, $\rho_n \geq 0$ sur $\mathbb{R}^n$

Prop. • $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, $\rho_n * f \to f$ uniformément sur tout compact
• $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$, $\rho_n * f \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$

Corollaire: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert quelconque. Alors $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$

Thm (Riesz Frechet Kolmogorov): Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit ω un compact inclus dans Ω. Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$. On suppose que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, $\delta < d(\omega, \Omega^c)$ tel que $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon$ $\forall h \in \mathbb{R}^n$ avec $|h| < \delta$ et $\forall f \in \mathcal{F}$
Alors $\mathcal{F}_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$

III L'espace des fonctions de carré intégrable

① L'espace L^2, premières propriétés, rappels sur les espaces de Hilbert [EA]

Prop Soit (X, T, μ) un espace mesuré, muni du produit scalaire :
$\forall f, g \in L^2(X, T, \mu)$ $\langle f, g \rangle = \int f(x) \overline{g(x)} d\mu(x)$
l'espace vectoriel $L^2(X, T, \mu)$ est un espace de Hilbert

· Application du théorème de projection sur un convexe fermé. Définition de l'espérance conditionnelle pour une va L^2.

· Théorème de Riesz : Soit $\varphi \in (L^2)'$, $\exists ! f \in L^2$ tel que $\forall g \in L^2$, $\langle \varphi, g \rangle = \int f \bar{g}\, d\mu$.

[Bre] ↳ Thm de Lax-Milgram : Soit H un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire continue coercive, $\varphi \in H'$, alors $\exists ! u \in H$ tel que $a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle$ $\forall v \in H$.
De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété
$$u \in H \text{ et } \frac{1}{2} a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}$$

· Existence d'une base hilbertienne dénombrable.

Sur $L^2(\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z})$, la théorie des séries de Fourier nous donne la base hilbertienne suivante $(t \mapsto e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$

② Transformation de Fourier sur L^2 et bases hilbertiennes

Déf : On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ qui vérifient $\forall k, p$ entiers positifs :
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p \partial^k g(x)| < +\infty$$

Thm : $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$

Déf : Pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de u, notée $\hat{u}$ ou $\mathcal{F}(u)$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(x)\, dx$$

(Zuily) Exemple : Transformée de Fourier d'une gaussienne
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $u(x) = e^{-a|x|^2}$. On a $\hat{u}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$

Ptés : (i) Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors $\hat{\varphi}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a $(\mathcal{F}\varphi)' = \mathcal{F}(-ix\,\varphi(x))$
(ii) Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}(\varphi') = i\xi\, \hat{\varphi}(\xi)$

Thm : La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire bijective bicontinue de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Si on pose pour $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
$$\bar{\mathcal{F}} v(x) = 2\pi \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} v(\xi)\, d\xi$$
alors $\mathcal{F}$ envoie $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ et on a $\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}} = \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F} =$ identité de $\mathcal{S}$ ie $\mathcal{F}^{-1} = \bar{\mathcal{F}}$

Thm : L'application $T \longrightarrow \sqrt{2\pi}\, \hat{T}$ est une isométrie bijective de L^2 sur lui-même.

Thm de Shannon : $BL^2 = \{u \in L^2(\mathbb{R}), \hat{u}(\gamma) = 0 \text{ pp sur } \mathbb{R} \setminus]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\}$ muni du produit scalaire sur L^2 est un espace de Hilbert, $(\tau_k \operatorname{sinc})_{k \in \mathbb{Z}}$ en est une base hilbertienne. [Wil]

Polynômes orthogonaux : Soit ρ une fonction poids, les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(\rho)$. si $\exists \alpha$ tq $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x)\, dx < \infty$ (OA)

Vecteurs propres de la transformée de Fourier dans L^2 : la dérivée d'ordre n de $H(t) = e^{-t^2}$ est de la forme $e^{-t^2} H_n(t)$ où $H_n(t)$ est un polynôme appelé polynôme de Hermite. On définit les fonctions de Hermite $h_n(t) = (n!\, 2^n \sqrt{\pi})^{1/2} H_n(t)\, e^{-t^2/2}$. $(h_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ et
$$\hat{h}_n = \sqrt{2\pi}(-i)^n h_n$$ (Kol)

③ L'espace H^1

[Bre] On pose $I =]0,1[$. On définit l'espace
$$H^1(I) = \{u \in L^2(I), \exists g \in L^2(I) \text{ tq } \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \ \forall g \in \mathcal{C}_c^1(I)\}$$
Pour $u \in H^1(I)$, on note $u' = g$

Thm : $H^1(I)$ est un espace de Hilbert pour la norme
$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{1/2}$$

Déf : On désigne par $H_0^1(I) = \overline{\mathcal{C}_c^1(I)}^{H^1}$

Thm : Soit $u \in H^1(I)$ alors $u \in H_0^1(I)$ ssi $u(0) = u(1) = 0$

Thm (Inégalité de Poincaré) : $\exists$ constante C telle que
$$\|u\|_{H^1} \leq C \|u'\|_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1(I)$$

Résolution d'un problème aux limites
$$(P) \begin{cases} -u'' + u = f \text{ sur } I =]0,1[& f \in L^2(I) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Déf : une solution faible est une solution $u \in H_0^1(I)$ vérifiant $\int u'v' + \int uv = \int fv$ $\forall v \in H_0^1(I)$

→ toute solution classique est solution faible
→ Il existe une unique solution faible d'après Lax Milgram
→ Retour à la solution classique si $f \in \mathcal{C}(\bar{I}) \cap L^2$ alors u est $\mathcal{C}^2$ et on montre que c'est une solution classique