150 Racines de polynômes. Fonctions symétriques élémentaires. Localisation dans le cas réel et complexe

I) Racines d'un polynôme

1) Généralités

1) Racines d'un polynôme

Déf : $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ est une racine de P si $P(a)=0$

Prop : $a \in \mathbb{K}$ racine de $P \Leftrightarrow X-a \mid P$

Déf : $a \in \mathbb{K}$ est une racine de multiplicité $h \geq 1$ si $(X-a)^h \mid P$ et $(X-a)^{h+1} \nmid P$.

Prop : $P \in \mathbb{K}[X]$, $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{K}$ des racines de P d'ordre $h_1, \dots, h_r$ (a_i 2 à 2 distincts). Alors $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-a_1)^{h_1} \cdots (X-a_r)^{h_r} Q$ et $\forall i$, $Q(a_i) \neq 0$

Csq : Si $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$ alors P a au plus n racines (comptées avec leur ordre de multiplicité)

Rq : La proposition précédente est fausse si $\mathbb{K}$ n'est pas un corps mais seulement un anneau, $P = \bar{4} X \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}[X]$

Cor : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\forall x \in \mathbb{K}$, $P(x)=0$. Si $\mathbb{K}$ est infini on a $P=0$

App : $\forall n \geq 1$, $\exists ! T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$

Prop : car $\mathbb{K} = 0$, $a \in \mathbb{K}$
a racine d'ordre $h \Leftrightarrow \begin{cases} P^{(i)}(a)=0, \ \forall i \leq h-1 \\ P^{(h)}(a) \neq 0 \end{cases}$

Contre ex : $P = X^2+1$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$

App : $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ n'a que des racines simples

Déf : $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit irréductible s'il n'est pas inversible ($\deg(P) \geq 1$) et si ses seuls diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$ sont les constantes non nulles et les polynômes associés à P

Prop : (1) Tout polynôme de degré $=1$ est irréductible
(2) Tout polynôme irréductible de deg > 1 n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$
(3) La réciproque de (2) est fausse. Par exemple $(X^2+1)^2$ n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$ mais est réductible dans $\mathbb{Q}[X]$
(4) La réciproque de (2) est vraie si $\deg P \in \{2,3\}$

6. Aspects topologiques

Prop : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, $P_k = a_k \prod_{i=1}^{n} (X - x_{i,k})$
Soit $z \in \mathbb{C}$ racine de P et p sa multiplicité. On suppose de plus que $P_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} P$.
Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_0 > 0$ tel que pour tout $k \geq k_0$, il y a au moins p racines $x_{i,k}$ vérifiant $|z - x_{i,k}| \leq \varepsilon$

Prop : Soient $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ et x_0 une racine simple de P_0. Alors $\exists \varphi$ de classe C^∞ définie sur un voisinage $\mathcal{U}$ de P_0 dans $\mathbb{R}_n[X]$ à valeurs dans un voisinage V de x_0 dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall P \in \mathcal{U}$, $\forall x \in V$, $x = \varphi(P) \Leftrightarrow P(x) = 0$

App : L'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés à racines simples est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Fonctions symétriques élémentaires

Déf : On appelle polynôme symétrique élémentaire de $A[X_1, \dots, X_n]$ les polynômes Σ_p ($1 \leq p \leq n$) définis par
$\Sigma_p = \sum_{i_1 < \dots < i_p} X_{i_1} \cdots X_{i_p}$

Prop : $(T - X_1) \cdots (T - X_n) = T^n - \Sigma_1 T^{n-1} + \Sigma_2 T^{n-2} + \dots + (-1)^n \Sigma_n$

Th : $P = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ scindé sur $\mathbb{K}$ et si $u_1, \dots, u_n$ sont ses racines alors $\forall i$ $(-1)^i a_{n-i} = \Sigma_i(u_1, \dots, u_n)$

Def : $P \in A[X_1, \dots, X_n]$ est dit symétrique si pour tout $\sigma \in S_n$, $P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = P(X_1, \dots, X_n)$

Ex : Dans $\mathbb{R}[X,Y,Z]$, $P = XY + YZ + ZX$

Th : Soit $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme symétrique dans $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. $\exists! \ \phi \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ tel que $P = \phi(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$

Ex : Décomposition de $P = X^3 + Y^3 + Z^3 \in \mathbb{R}[X,Y,Z]$
$P = \Sigma_1^3 - 3\Sigma_1\Sigma_2 + 3\Sigma_3$

Th : $P = \sum a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$, scindé sur $\mathbb{K}$.
Alors si on note $u_1, \dots, u_n$ ses racines (non nécessairement distinctes) on a $\forall 1 \leq i \leq n$ $(-1)^i a_i = \Sigma_i(u_1, \dots, u_n)$

IV Existences des racines

1) Extension de corps

Def : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, P irréductible. ~~Une~~
Une extension $L \supset K$ est un corps de rupture de P si L est une extension monogène $L = K(\alpha)$ et $P(\alpha) = 0$

Th : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible.
Il existe un corps de rupture pour P, unique à isomorphisme près

Ex : $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(X^2+1)$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}[X]/(X^3-2)$

Def : $P \in \mathbb{K}[X]$ (irréductible ou non) de degré n
Un corps de décomposition de P sur $\mathbb{K}$ est une extension $L \supset K$ telle que
1) Dans $L[X]$, P est produit de facteur de degré 1 (P a toutes ses racines dans L)
2) L est minimal pour cette propriété (ou encore les racines de P engendrent L)

Th : $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\exists$ un corps de décomposition de P, unique à isomorphisme près.

2) Comptage des racines

Def : Une suite de Sturm pour P sur $[a;b]$ est une suite de polynômes $P_0 = P, P_1, \dots, P_K$ satisfaisant aux quatres propriétés suivantes : 1) $P(a) \neq 0$, $P(b) \neq 0$
2) P_K ne s'annule pas sur $[a;b]$
3) Si pour un $0 \leq i < K$ et $c \in]a;b[$ on a $P_i(c) = 0$ alors $P_{i-1}(c)P_{i+1}(c) < 0$
4) Si pour $c \in]a;b[$ on a $P(c) = 0$ alors on a $P(x)P_1(x)(x-c) > 0$ au voisinage de c

Def : Soit $a = (a_0, \dots, a_n)$, on note $V(a)$ le nbre de changement des signes dans a

Th : $P \in \mathbb{R}[X]$, $a < b$ tels que $P(a) \neq 0$ et $P(b) \neq 0$ et tels que P a m racines dans $[a;b]$
Alors si $\tilde{P}$ est une suite de Sturm pour le polynôme P : $m = V(\tilde{P}(a)) - V(\tilde{P}(b))$

Th : $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P(a)P(b) \neq 0$. On appelle $V(P(a))$ le nombre de changements de signes de la suite $P(a), \dots, P^{(n)}(a)$. Alors le nbres de racine de P dans $[a;b]$ est égal à $V(P(a)) - V(P(b)) - 2m$ où m ~~$\in \mathbb{N}$~~ un entier

Cor : Soit $P = a_n X^n + \dots + a_0$, ~~$a_0 a_n$~~ $\in \mathbb{R}[X]$, $a_0 a_n \neq 0$

Alors le nbre de racines ≥ 0 de P est égal à $v-2m$ où m est un entier et v désigne le nbre de changement de signes de la suite $a_0, \dots, a_n$

Th : Soient $f, g \in Hol(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $\Gamma = (\Gamma_i)_{i \in I}$ le bord orienté d'un compact K contenu dans Ω. Si $|f(z)| > |g(z)|$ sur Γ, alors le nombre de zeros de $f(z)+g(z)$ dans K est égal au nbre de zeros de f dans K compté avec multiplicité

Ex : Le polynôme $P = X^7 - 5X^3 + 12 \in \mathbb{C}[X]$ possède aucune racine dans $D(0,1)$. Il en possède 7 dans $\{z \in \mathbb{C}, 1 < |z| < 2\}$

Th : Le nombre de racines distinctes d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ sur $\mathbb{C}$ et le nombre de racines réelles distinctes de P sont respectivement égaux au rang et à la signature de la forme $S_1(x_1, \dots)_P$ où $S_n(x, x) = \sum_{i,k=0}^{n-1} s_{i+k}\, x_i x_k$ avec $s_p = \sum_{j=1}^{r} n_j \alpha_j^p$, α_j étant racine de P de multiplicité n_j. [DEV]

3) Discriminant

Def : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ unitaire. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les p de P (comptés avec multiplicité) dans un corps algébriquement clos $\overline{\mathbb{K}} \supset \mathbb{K}$. Le discriminant de P, noté $dis(P)$ est $dis(P) = \prod_{1 \leq i < j \leq p} (\alpha_i - \alpha_j)^2$

Ex : $P = X^3 + pX + q$, $dis(P) = -4p^3 - 27q^2$
$P = X^2 + bX + c$, $dis(P) = b^2 - 4c$

Th : $\exists!$ polynôme à coefficient entiers $D_p(u_1, \dots, u_p)$ tel que pour tout polynôme unitaire $P = X^p + a_1 X^{p-1} + \dots + a_p$ de degré p ~~NN~~ à coefficient dans $\mathbb{K}$ on ait $dis(P) = D_p(a_1, \dots, a_p)$

Les propriétés suivantes sont équivalentes
1. Les polynômes P et P' ont un facteur commun non cste
2. Le polynôme P a une racine multiple dans un corps algébriquement clos $\overline{K} \supset K$
3. $dis(P) = 0$

Prop : $dis(P) = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} res(P, P')$, pour P unitaire de degré p

IV Localisation des racines

a. Localisation dans le cas réel

Th : $P = X^n + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$
$\exists L$ tel que $P^{(i)}(L) \geq 0$, $\forall i \leq n$, alors pour toute racine réelle x de P, $x \leq L$

Ex : $P(x) = x^7 - 5x^3 + 12$
Les racines réelles de P sont dans l'intervalle $[-2; 2]$

b. Localisation dans le cas complexe

Th : Soit $P = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$; $z_1, \dots, z_n$ les n racines
$M = \max_{1 \leq i \leq n} |z_i|$. Alors on a $M \leq \max(1, \sum_{i=0}^{n} |a_i|)$,
$M < 1 + \max_{0 \leq i \leq n-1} |a_i|$, $M \leq |a_0| + |a_0 - a_1| + \dots + |a_{n-2} - a_{n-1}| + |1 - a_{n-1}|$

Th : Soit $P = (X - z_1) \dots (X - z_n) \in \mathbb{C}[X]$, $n \geq 1$
Alors les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P

App : ellipse de Steiner
Soit M_1, M_2, M_3 trois points non alignés dans le plan de la variable complexe, d'affixes respectivement z_1, z_2, z_3 et soit $P = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$.
Alors les racines de P' sont les foyers d'une ellipse tangente aux trois côtés du triangle $M_1 M_2 M_3$ en leurs milieux [DEV]