Leçon 141. Utilisation des groupes en géométrie

I] Utilisation dans l'étude générale des géométries

Idée: Il y a une correspondance entre une géométrie donnée et le groupe de ses transformations

a) Géométrie vectorielle, groupe linéaire

Soit k un corps, $m \in \mathbb{N}$, E un espace vectoriel de dimension n sur k

Déf: $GL(E) = \{$endomorphismes inversibles de $E\}$

Rq On a $GL(E) \cong GL_n(k)$

Déf. Soit $u \in GL(E)$.

- u est une transvection si sa matrice dans une base convenable s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- u est une dilatation si sa matrice dans une base convenable s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots 1 & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in k \setminus \{0,1\}$

Prop: Les dilatations et les transvections engendrent $GL(E)$

b) Géométrie affine, groupe affine

Déf Soit E un ensemble non vide, $\vec{E}$ un k-espace vectoriel de dimension finie. On munit E d'une structure d'espace affine de direction $\vec{E}$ en donnant une action simple transitive de $(\vec{E},+)$ sur E.

Déf: Soient E et F des espaces affines de direction $\vec{E}$ et $\vec{F}$.

- Soit $f: E \to F$, on déduit $\vec{f}: \vec{E} \to \vec{F}$. On dit que f est affine si $\vec{f}$ est linéaire.
- Si $f: E \to E$ et est bijective, on dit que f est une transformation affine
- $GA(E) := \{$transformations affines$\}$
- $T(E) := \{ t \in GA(E) / \exists \vec{u} \in E, \forall a \in E, t(a) = a + \vec{u} \}$

Prop $(GA(E),\circ)$ est un groupe. $(T(E),\circ)$ est un sous-groupe distingué de $(GA(E),\circ)$

- De plus, il y a un morphisme de groupe $L: GA(E) \to GL(\vec{E})$ surjectif, de noyau $T(E)$

Prop. Etant donné $a \in E$, $\varphi \in GA(E)$, il existe un unique couple $(t,\psi) \in T(E) \times GA_a(E)$ $(GA_a(E) = Stab_{GA(E)}(a))$

$\varphi = t \circ \psi$

c) Géométrie euclidienne, groupe des isométries

Déf Un espace affine E de direction $\vec{E}$ est dit euclidien si $\vec{E}$ est un espace vectoriel euclidien

Déf Soit E un espace affine euclidien de direction $\vec{E}$, $f: E \to E$ une application, f est une isométrie si elle conserve les distances

Prop: Les isométries de E sont exactement les transformations affines de E dont la partie linéaire est orthogonale, elles forment un sous-groupe de $GA(E)$ noté $Is(E)$. $Is^+(E)$ est le sous-groupe de $Is(E)$ formé des transformations dont la partie linéaire est dans $SO(E)$

Prop. $Is(E) = T(E) \rtimes O(E)$; $Is^+(E) = T(E) \rtimes SO(E)$

Prop: $Is(E)$ est engendré par les réflexions

Prop. $Is(E)$ agit de manière simple et transitive sur les repères orthonormés

Classification dim 2: $Is^+(E) = \{$translations, rotations$\}$

$Is(E) \setminus Is^+(E) = \{$réflexions, symétries glissées$\}$

dim 3: $Is^+(E) = \{$translations, rotations, vissages$\}$

$Is(E) \setminus Is^+(E) = \{$réflexions, symétries glissées, rotations-réflexions$\}$

d) Géométrie circulaire, groupe circulaire

On identifiera $\mathbb{C}$ au plan affine $\mathbb{R}^2$. Soit $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$

Déf. On appelle cercle ou droite de $\hat{\mathbb{C}}$ une partie de $\hat{\mathbb{C}}$ qui est soit un cercle de $\mathbb{C}$, soit ~~une~~ ~~droite~~ la forme ~~(réelle)~~ $D \sqcup \{\infty\}$, D droite réelle de $\mathbb{C}$.

Déf : On appelle groupe circulaire de $\mathbb{C}$, noté $Circ(\mathbb{C})$, le groupe formé par les permutations de $\hat{\mathbb{C}}$ qui transforme un cercle ou droite de $\hat{\mathbb{C}}$ en un cercle ou droite de $\hat{\mathbb{C}}$

Prop. $Circ(\mathbb{C})$ est engendré par les similitudes et les inversions

Prop $Circ(\mathbb{C})$ agit transitivement sur l'ensemble des cercles ou droites de $\hat{\mathbb{C}}$

App Prop $Circ(\mathbb{C})$ agit transitivement sur l'ensemble des ~~cercles~~ couples (C_1, C_2) où C_1, C_2 sont deux cercles de $\mathbb{C}$ sans points communs.

Application Alternative de Steiner : Étant donné deux cercles non sécants, si on peut créer une chaîne de cercles tangeants aux deux cercles et entre eux qui se referme, alors toute telle chaîne se referme

e) Géométrie projective, groupe projectif

Déf. $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \{$droites vectorielles de $\mathbb{C}^2\}$ est la droite projective complexe.

Déf. $PGL_2(\mathbb{C}) = GL_2(\mathbb{C})/_{\mathbb{C}^*}$ où $A \sim B \Leftrightarrow A = \lambda B$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $A, B \in GL_2(\mathbb{C})$

Prop $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$

Prop. $PGL_2(\mathbb{C})$ agit par homographie sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ vu comme $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$$

Prop L'action de $PGL_2(\mathbb{C})$ est $\underset{\text{simplement}}{\sim}$ 3-transitive

Application : Définition du birapport :
Soient M_1, M_2, M_3, ~~4~~ 3 points distincts de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, Alors il existe un unique $h \in PGL_2(\mathbb{C})$ tel que $\begin{cases} h(M_1) = \infty \\ h(M_2) = 0 \\ h(M_3) = 1 \end{cases}$

Le birapport de M_1, M_2, M_3, M_4, noté $[M_1, M_2, M_3, M_4]$ est l'image de M_4 par cette homographie.

Thm : Une bijection de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est une homographie ssi elle conserve le birapport

f) Géométrie hyperbolique [AUD p219]

Déf : • $H = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} z > 0\}$ demi-plan de Poincaré
• On appelle droite de H les demi-cercles centrés sur l'axe réel et les demi-droites orthogonales à l'axe des x (réel)

Prop. $PSL_2(\mathbb{R})$ agit sur H par homographies
Cette action est transitive sur H, mais aussi sur les droites de H.

Prop-déf. Soit $A, B \in H$, soient M, N les extrémités de cette droite dans $\overline{H} \cup \{\infty\}$
On pose $\begin{cases} d(A,B) = |\log [A,B,M,N]| & A \neq B \\ d(A,A) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$
d est une distance

Prop. $PSL_2(\mathbb{R})$ préserve les distances

II] Utilisation des groupes dans l'étude de figures particulières.

1) Coniques

~~a) Coniqu~~ Deux coniques sont équivalentes si elles sont dans la même orbite pour l'action du groupe de transformations associés.

Classification affine.

Prop Il y a 9 orbites, correspondant aux équations $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=-1$, x^2+y^2, $x^2-y^2=1$, x^2-y^2, $x^2=y$, $x^2=1$, $x^2=-1$, x^2

Classification euclidienne

Il y a une infinité d'orbites. Si on se contente des coniques irréductibles, on peut les grouper en quatre familles paramétrées par $a, b, p > 0$

i) ellipses imaginaires $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + 1 = 0$

ii) ellipses $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0$

iii) hyperboles $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0$

iv) paraboles $x^2 - 2py = 0$

2) Polyèdres réguliers de $\mathbb{R}^3$ [Arm]

Déf. P partie finie de S^2, contenant 4 points non coplanaires. On dit que P est un polyèdre régulier si :

i) $\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \exists k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in P$, $\mathrm{Card}\{y \in P \setminus \{x\},\ d(x,y) = \delta\} = k$ et $\delta = \min_{y \in P \setminus \{x\}} d(x,y)$

ii) Si δ est comme ci-dessus, et $(x,y) \in P^2$, il existe une suite finie $x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y$ tel que $\forall i$, $|x_i x_{i+1}| = \delta$

Déf. Soit $S \in SO(3)$. Si $S \neq Id$, on appelle pôle de S les deux points de S^2 laissés fixe par S.

Prop. Soit Γ le groupe des déplacements fixant P.
Alors i) Γ est un sous-groupe fini de $SO(3)$
ii) P est un ensemble de pôles, et c'est une orbite sous l'action de Γ sur S^2

Prop. Les sous-groupes finis de $SO(3)$ sont $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, D_n, $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{A}_5$

Prop. Il y a exactement 5 polyèdres réguliers dans $\mathbb{R}^3$ et on a :
- tétraèdre : groupe de déplacement $\mathfrak{A}_4$
- cube et octaèdre : groupe de déplacement $\mathfrak{S}_4$
- dodécaèdre et icosaèdre : groupe de déplacement $\mathfrak{A}_5$

III) Application des groupes à des cas particuliers

1) Banach-Tarski [Gui]

Déf. . G un groupe, E un ensemble tel que G agit sur E. $(A,B) \subset E^2$
. On dit que A et B sont G-équidécomposables s'il existe une partition $(A_i)_{1 \le i \le m}$ de A et une partition $(B_i)_{1 \le i \le m}$ de B telle que $B_i = g_i A_i$ où $g_i \in G$. On note $A \sim B$
. Un ensemble A est dit dédoublable s'il existe deux parties A' et A'' telles que $A' \cap A'' = \emptyset$ et $A' \sim A$, $A'' \sim A$.

Th : Banach-Tarski faible
- $S^2 \setminus D$ est $SO(3)$-dédoublable où D est dénombrable
- S^2 est $SO(3)$-dédoublable

2) Algèbre des quaternions et structure de $SO(3)$ [Per]

Th-déf. Il existe une algèbre $\mathbb{Q}$ de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, appelée algèbre des quaternions, munie d'une base $1, i, j, k$ telle que :
a) 1 est l'élément neutre pour la multiplication
b) $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$, $ij = -ji = k$

Déf : On définit une norme sur les quaternions par $N(q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ où $q = a + ib + jc + kd$, $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

Prop : $G = \{q \in \mathbb{Q},\ N(q) = 1\}$ est un groupe

Action de G sur S^2

Soit $P = \{bi + cj + dk,\ (b,c,d) \in \mathbb{R}^3\}$

$$G \times G \cap P \to G \cap P$$
$$q \quad q' \longmapsto q q' q^{-1}$$

Cela livre un morphisme de groupe $s : G \to SO(3)$

Prop. $SO(3) \cong G/_{\{1,-1\}}$

Cs. $\Pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

réf : GUINOT, Le paradoxe de Banach-Tarski. [Gui]
Perrin, Cours d'algèbre [Per]
[Arm], Arnaudiès, Les polyèdres de $\mathbb{R}^3$ et leurs groupes
[AUD], Audin, géométrie