140

Système d'équations linéaires. Systèmes échelonnés. Résolution. Exemples et applications.

On se place sur un corps $\mathbb{K}$.

I. Généralités sur les systèmes linéaires [Gri]

1. Définitions

On appelle système linéaire de p équations à n inconnues, un système de la forme :
$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$
En posant $A = (a_{ij}) \in M_{p,n}(\mathbb{K})$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on peut réécrire le système : $AX = B$.
Le rang de A est le rang du système.
Le système est dit compatible s'il admet une solution.
Si $B = 0$, le système est dit homogène.
Deux systèmes sont dits équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.

2. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes

- Prop : $\forall P \in Gl_n(\mathbb{K})$, $Ax = b \iff PAx = Pb$

Cas particulier :
- $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ $(L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j) \leftarrow$ Transvection.
- $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ $(L_i \leftarrow \lambda L_i) \leftarrow$ Dilatation.
- $M_{ij} = (\delta_{i,\tau(j)})$ $(L_i \leftrightarrow L_j) \leftarrow$ Permutation.

3. Théorème de Rouché-Fontené

- Th : Soit (S) un système de p équations à inconnues de rang r. On peut donc extraire δ un mineur non nul de taille r. Alors le système est compatible ssi tous les déterminants caractéristiques associés à δ sont nuls.

Si cette condition est réalisée, (S) est équivalent au système des équations principales :
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases}$$
Il admet alors une infinité de solutions dépendantes de $n-r$ paramètres. Les solutions se calculent en résolvant le système de Cramer obtenu en donnant aux variables libres $x_{r+1}, \dots, x_n$ des valeurs arbitraires.

4. Système de Cramer.

- Déf : Un système de Cramer est un système dont la matrice est carré et inversible.
- Prop : Un système de Cramer admet une unique solution.
- Th : En notant $A = (c_1, \dots c_n)$ et $AX = B$ le système de Cramer, on a :
$$\forall i,\ x_i = \frac{1}{\det A} \det(c_1, \dots c_{i-1}, B, c_{i+1}, \dots c_n).$$
- Exemple : $\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 7 \\ x + 2y - 4z = 3 \\ 3x - 4y - 6z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$
- Rq : Efficace en petite dimension, mais sinon il faut calculer $(n+1)$ déterminants de taille n ...
- App : Soit $Ax = 0$ un système linéaire homogène où $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors le système admet des solutions non nuls ssi $\det A = 0$.
- Exemple : La division euclidienne de $F \in \mathbb{K}_d[X]$ par $G \in \mathbb{K}_\ell[X]$
  $\hookrightarrow$ système de $(d+1)$ équations en $(d+1)$ inconnues.

II. Systèmes échelonnés et résolutions directes.

1) Systèmes échelonnés.

- Déf : $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite échelonnée si ses lignes commencent par un nombre strictement croissant de zéro à mesure que l'indice de ligne augmente.
- Rq : Une matrice échelonnée carrée est triangulaire.
- La résolution d'un système échelonné se fait en cascade $\to O(n)$
- Prop : $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, A peut être transformée en une matrice échelonnée $\tilde{A}$ par suite d'opérations sur les lignes.

2) Se ramener à un système échelonné

- Méthode de Gauss : Grâce aux opérations élémentaires, on peut se ramener à un système échelonné :

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 12x_3 = 4 \\ 3x_1 + 8x_2 + 13x_3 = 5 \\ 2x_1 + 9x_2 + 18x_3 = 11 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \end{matrix} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_3 = 4 \end{cases}$$

[Tau]

. **Th**: Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On suppose que la première colonne de A est non nulle.
Alors : il existe $T_1, \dots T_n \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$T_1 \dots T_n A = \begin{pmatrix} \alpha & * & * & \dots & * \\ 0 & & & & \\ \vdots & & A_1 & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \alpha \neq 0 \\ A_1 \in M_{n-1,p-1}(\mathbb{K}) \\ rg(A) = 1 + rg(A_1) \end{array}$$

[Cia]

. **Th**: Soit A une matrice carrée, inversible ou non. Il existe au moins une matrice inversible M telle que MA soit triangulaire supérieure.

. **Rq**: Gauss : $O(n^3)$

. Applications :

* Calcul de déterminants, de rangs et d'inverse de matrices.
* liberté d'une famille de vecteurs :
  → les vecteurs $v_1 = (1,-2,-3)$; $v_2 = (2,3,-1)$ et $v_3 = (3,2,1)$ sont-ils libres ? oui.
* Dire si un vecteur appartient à l'espace engendré par d'autres.
* Montrer qu'une famille est génératrice
* Déterminer une base de $F \cap G$, $F = vect(v_1, v_2) = vect((1,-1,0,2);(2,1,3,1))$

$G = vect(w_1,w_2) = vect((1,1,1,1),(3,-4,4,2))$

→ $F \cap G = vect(8,1,9,7)$.

* Equations d'un ss espace.

. Applications :

* $GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices élémentaires
* $GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices de transvections et de dilatations
* La notion de dimension est bien définie.

. **Décomposition LU** : Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que toutes ses sous matrices diagonales soient inversibles. Alors, il existe L triangulaire inf, avec $diag(L) = (1, \dots 1)$ et U triangulaire sup tel que : $A = LU$. De plus une telle factorisation est unique

. Remarque : - Calcul de L et de U en $O(n^3)$
- on résout deux systèmes linéaires échelonnés.

* Application :

  * choleski : pour les matrices A symétrique définie positive : $\exists B$ matrice réelle triangulaire inférieure telle que :

  $A = BB^T$.

. **Décomposition de Bruhat** : [DEV]

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $\exists T_1, T_2 \in T_r$, $\exists! P_\sigma$, matrice de Permutation $(P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)}))$ tel que : $A = T_1 P_\sigma T_2$.
La partition de $GL_n(\mathbb{K}) = \bigcup_{\sigma \in S_n} T_1 P_\sigma T_2$ est appelée décomposition de Bruhat.

III. Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires [Cia]

1. Principe des méthodes itératives

Soit A une matrice inversible et b un vecteur. On veut calculer $u / Au = b$. Si on a B' une matrice et C' un vecteur tq : $(I - B')$ soit inversible et que la solution de $X = B'X + C$ soit la même que celle de $AX = b$. Alors on prend X_0 un vecteur initial, et on pose $X_{k+1} = B'X_k + C$.
La méthode est dite convergente si $\lim X_k = X$, $\forall X_0$.

.Th: La méthode itérative est convergente ssi : $\rho(B) < 1$.

2. Méthode de Jacobi et Gauss Seidel.

On cherche à écrire la matrice A ss la forme d'une décomposition $A = M - N$, où M est une matrice inversible et facile à inverser.

On pose : $A = \begin{pmatrix} D & -F \\ -E & D \end{pmatrix}$

. Méthode de Jacobi : $A = D - (E+F)$.

La matrice de la méthode itérative est la matrice de Jacobi $J = D^{-1}(E+F)$

Th: Si A et $2D - A$ sont des matrices symétriques définies positives, alors la méthode de Jacobi est convergente.

. Méthode de Gauss Seidel : $A = (D-E) - F$

La matrice de la méthode itérative est :

$$\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1}F$$

.Th: Si A est une matrice symétrique définie positive, alors la méthode de Gauss seidel converge.

.Th: Si A est diagonale dominante, alors Jacobi et Gauss Seidel convergent.

3. Méthode de Gradient

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. On veut résoudre $Ax = b$ en utilisant une suite du type $x_{k+1} = x_k + \alpha_k r_k$.

Soit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$y \mapsto \frac{1}{2}(y, Ay) - (b, y)$.

Prop: J est strictement convexe et possède donc un unique minimum qui est solution de $Ax = b$.

* gradient à pas fixe : (α_k est constant et $r_k = -J'(x_k)$)

La suite est de la forme $x^{k+1} = x^k - \alpha J'(x^k)$.

Prop: La méthode à pas fixe converge ssi $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_n}$, avec λ_n la plus grande vp de A. La valeur optimal est :

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$$

→ avec ce paramètre optimal, on a : $\|x^k - x\| \leq \left(\frac{\mathrm{cond}(A) - 1}{\mathrm{cond}(A) + 1}\right)^k \|x^0 - x\|$

pb : connaître λ_1 et λ_n.

* gradient à pas optimal : (α_k varie et $r_k = -J'(x_k)$) [DVP]

on prend $\alpha_k = \frac{(r_k, r_k)}{(Ar_k, r_k)}$

.Prop: α_k est l'unique réel tel que :

$$J'(x_k - \rho_k r_k) \cdot r_k = 0.$$

→ La convergence est la même que pour le pas fixe.

[Gri] Grifone

[Tau] Tauvel, Algèbre

[Cia] Ciarlet