1

Cadre : On se place dans un plan affine E.

I Etude analytique et classification

a) Définitions

Aud p222 223 — Déf : On appelle conique $C(x,y)$ un polynôme à deux variables de degré 2. 2 polynômes représentent la même conique ssi elles sont proportionnelles.

Aud p222 — Déf : On appelle image de la conique l'ensemble $\{M \in E \,/\, \varphi(\vec{OM}) + L_0(\vec{OM}) + C_0 = 0\}$ avec $O \in E$, $C_0 \in \mathbb{R}$, L_0 une forme linéaire et φ une forme quadratique.

Aud p222 — Rq : - φ ne dépend que de la conique alors que C_0 et L_0 dépendent aussi du centre O choisi.
- Dans le cas où l'image permet de déterminer la conique, on confond souvent les 2.

ex : $C(x,y)$: $88x^2 + 130xy + 4y^2 + 1036x + 2y - 42 = 0$

Aud p223 — Déf : Soit C une conique, φ, L_0, C_0 associées. On appelle forme quadratique homogénéisée ou propre, Q_C définie par $Q_C(u,z) = \varphi(u) + L_0(u)z + C_0 z^2$

ex : Q_C a pour matrice $\begin{pmatrix} 88 & 65 & 518 \\ 65 & 4 & 2 \\ 518 & 2 & -42 \end{pmatrix}$.

Aud p223 — Déf : Une conique est dite propre ssi Q_C non dégénérée

Théorème de Pascal (Application des équations)

Tis p 87 — Soient A, B, C, A', B', C' 6 points dont 3 quelconques ne sont jamais alignés. Alors une conique propre passe par ces 6 points ssi les "points d'intersection" M, N, P des couples (BC', CB'), (AB', BA') et (AC', CA') sont alignés. Cette conique est alors unique.

DVP 1

Aud p227 — Déf : On appelle conique à centre de centre O une conique pour laquelle il existe un unique point O tel que $L_0 = 0$. O est un centre de symétrie

b) Classification affine.

Lav p240 — Th : Soit C une conique. On va classer les coniques par rapport à la signature de φ :

- Si la signature de φ est $(2,0)$ ou $(0,2)$, on est ramené à 3 équations possibles :
  - $x^2 + y^2 = -1 \longrightarrow$ ensemble vide
  - $x^2 + y^2 = 0 \longrightarrow$ un point
  - $x^2 + y^2 = 1 \longrightarrow$ ellipse
- Si la signature de φ est $(1,1)$, on est ramené à 2 équations possibles :
  - $x^2 - y^2 = 0 \longrightarrow$ deux droites sécantes
  - $x^2 - y^2 = 1 \longrightarrow$ hyperbole
- Si la signature de φ est $(1,0)$ ou $(0,1)$, on est ramené à 4 équations possibles :
  - $x^2 = -1 \longrightarrow$ ensemble vide
  - $x^2 = 0 \longrightarrow$ une droite
  - $x^2 = 1 \longrightarrow$ deux droites parallèles
  - $x^2 = y \longrightarrow$ parabole.

Rq : Cette classification est finie.

c) Classification euclidienne

On ajoute une structure euclidienne à E. Et on souhaite regarder les coniques propres d'image non vide dans un repère orthonormé.

Théorème de réduction simultanée

Aud p271 GRi p313 321 — Soient q, q' deux formes quadratiques avec q définie positive. Alors il existe une base orthonormée pour q et orthogonale pour q'.

On obtient alors la classification euclidienne suivante :

(2)

Aud p229-231 **Th** : Dans un repère orthonormé, on a :

- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a>0$ $a\geq b>0$ pour l'ellipse
- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $a>0$ $b>0$ pour l'hyperbole (fig 1)
- $y^2=2px$ $p>0$ pour la parabole.

Rq : Cette classification n'est pas finie

II Point de vue géométrique

Ici, on va voir des définitions strictement métriques

a) Description par foyer et directrice.

Aud p232 **Prop** : Pour toute conique propre d'image non vide qui n'est pas un cercle, il existe un point F appelé foyer, une droite D, appelée directrice, ne contenant pas F et un réel $e>0$ appelé excentricité tels que $C=\{M \,/\, d(F,M)=e\,d(D,M)\}$. Inversement étant donnés F, D, e l'ensemble des points vérifiant $d(F,M)=e\,d(D,M)$ est une conique propre, une ellipse si $e<1$, une parabole si $e=1$ et une hyperbole si $e>1$ (fig 2).

Lav p253 **Déf** : On appelle paramètre de la conique $p=eh$ avec $h=d(D,F)$.

Aud p233 **Rq/Déf** : Le foyer F se trouve sur un axe de symétrie perpendiculaire à la directrice que l'on appelle axe focal.

Aud p233 **Rq** : Par symétrie, les coniques à centre (pas cercle) ont deux foyers et deux directrice d'où la définition :

b) Description bifocale des coniques à centre

Aud p233 **Prop** : - Une ellipse de foyer F, F' est l'ensemble des points M tels que $MF+MF'=2a$ avec $a>0$ et $2a>FF'$

- une hyperbole de foyer F, F' est l'ensemble des points M tels que $|MF-MF'|=2a$ avec $a>0$ et $2a<FF'$.

Rq : Cette définition correspond à la construction : On prend un cercle T et un point F n'appartenant pas à T et une conique propre à centre est l'ensemble des centres des cercles passant par F et tangeants à T. (fig 3) Lav p249

Application : "construction du jardinier"

On peut dessiner, avec un crayon et une ficelle fixées aux deux foyers, une ellipse. Aud p235

c) Formulaire

Var. → lecture	Nom	$=f(e,h)$	$=f(a,b)$	$=f(e,p)$
e	excentricité	e	$\frac{\sqrt{a^2\pm b^2}}{a}$	e
h	$d(F,D)$	h	$\frac{b^2}{\sqrt{a^2\pm b^2}}$	$\frac{p}{e}$
p	paramètre	eh	$\frac{b^2}{a}$	p
a	demi grand axe	$\frac{eh}{\lvert 1-e^2\rvert}$	a	$\frac{p}{\lvert 1-e^2\rvert}$
b	demi petit axe pour ellipse	$\frac{eh}{\sqrt{\lvert 1-e^2\rvert}}$	b	$\frac{p}{\sqrt{\lvert 1-e^2\rvert}}$
c	$\frac{d(F,F')}{2}$	$\frac{e^2h}{\lvert 1-e^2\rvert}$	$\sqrt{a^2\pm b^2}$	$\frac{ep}{\lvert 1-e^2\rvert}$

Lav p253 **Rq** : - a, b, c ne sont pas définis pour la parabole.

- les - sont pour l'ellipse, les + pour l'hyperbole
- les similitudes ne changent pas e, on peut donc faire une classification à similitude près en fonction de e.

d) Propriétés géométriques

Aud p238 **Prop** : Soit C une conique propre à centre de foyer F, F'. La tangente à C en M est la bissectrice intérieure (resp extérieure) de l'angle en M du triangle MFF' si

C est une hyperbole (resp ellipse). (fig 4)

Application : Si on joue au billard dans une ellipse une boule passant par un foyer passera par l'autre.

Aud p236 Prop : Soit C une conique propre qui n'est pas un cercle. Soit F un foyer de C et D la directrice. Si M est un point de C, P le point d'intersection de la perpendiculaire à MF en F et de la droite D.

Aud p237 Alors (PM) est tangente à C en M. De plus, l'autre point de tangence $M' \in (MF)$. (fig 5) La reciproque est vraie.

Aud p237 Si C est une parabole, (MP) est la mediatrice de F et du projeté orthogonal de M sur D. (fig 6)

Application : Si on a un miroir parabolique, tout rayon arrivant parallèle à l'axe focal, est réflechi en un rayon passant par le foyer et reciproquement par le principe de retour inverse de la lumière. C'est pourquoi on utilise des antennes paraboliques avec un capteur au foyer.

Prop/Def : Soit C une ellipse et D un diamètre (passant par le centre) alors pour toute droite parallèle à D, les milieux de l'intersection de ces droites avec l'ellipse sont alignés et forment le diamètre conjugué. (fig 7)

Aud p279 Cor : 2 diamètres conjuguées supporte un repère orthonormée de ℓ.

Th : (1er théorème d'Apollonius)

Aud p279 Soient D, D' 2 diamètres conjugués, M, M' un point d'intersection de D avec l'ellipse et de D' avec l'ellipse. Soit P l'intersection des tangentes en M et M' alors

p388 $OMPM'$ est un parallèlogramme d'aire ab. (fig 8)

Ellipse de Steiner

Soit M_1, M_2, M_3 3 points non alignés de E, d'affixe z_1, z_2, z_3. Soit $P = (X-z_1)(X-z_2)(X-z_3)$. Alors les racines de P' sont les foyers d'une ellipse tangente aux 3 cotés de $M_1M_2M_3$ en leur milieu.

DVP 2

III Autres équations possibles

ⓐ Equations paramétriques

Mon p121 Prop - Une ellipse d'equation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé admet une représentation paramétique $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

- Une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé admet une représentation

Mon p122 paramétique $\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\,t \\ y = \varepsilon b\,\mathrm{sh}\,t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ avec $\varepsilon = 1$ pour la 1ère branche et $\varepsilon = -1$ pour la 2e.

- Une parabole d'equation $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormé admet une representation paramétique $\begin{cases} x = t^2/2p \\ y = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

ⓑ Equations polaires

Prop : La conique C de foyer F, de directrice D d'excentricité e, admet l'equation polaire :

Mon p123 $\rho = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta - \varphi)}$ où $h = d(D,F)$, $p = he$

$\varphi = (\vec{i}, D) + \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ dans $(F, \vec{i}, \vec{j})$.

Rq : Pour $e = 0$, on retrouve l'équation d'un cercle et on peut donc considerer que le cercle est la conique d'excentricité 0.

Application : 1ère Loi de Kepler.

La trajectoire des planètes sont des ellipses dont le Soleil est l'un des foyers.

Annexe :

fig 1 :

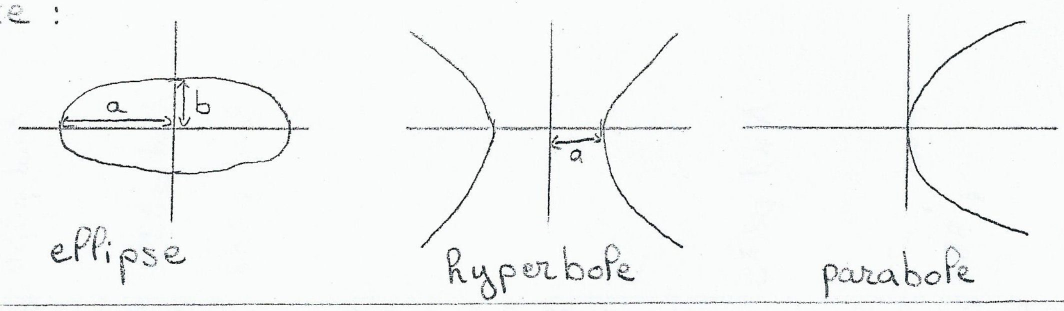


fig 2 :

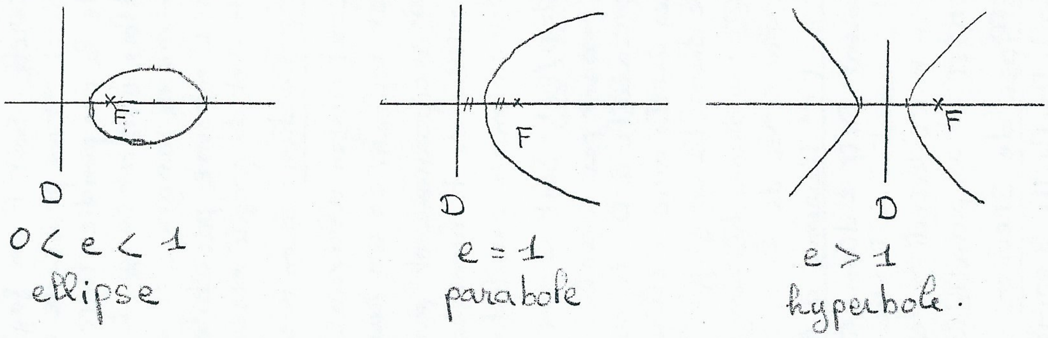


fig 3 :

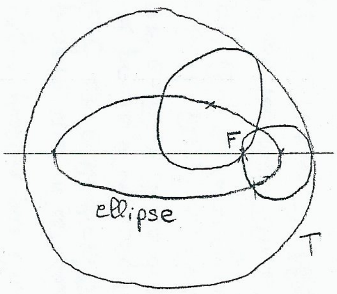


fig 4 :

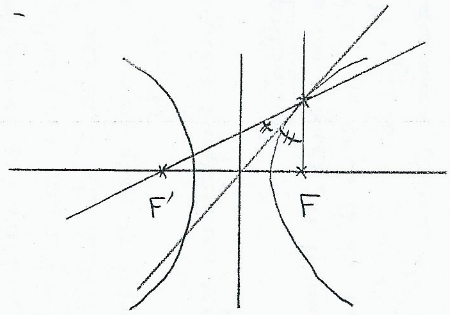


fig 5 :

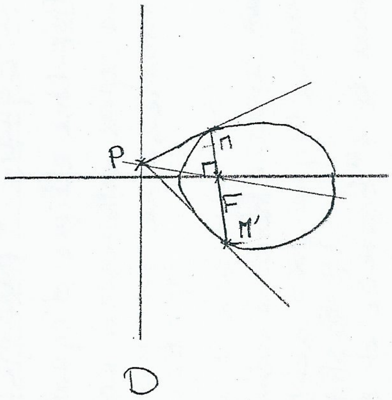


fig 6 :

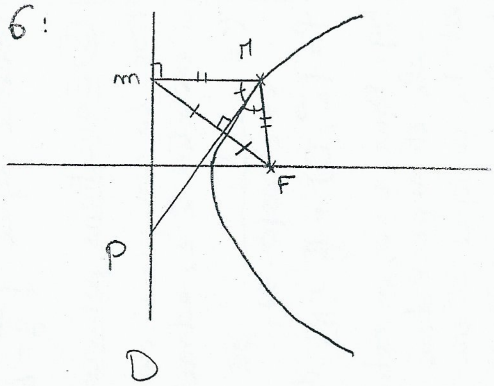


fig 7 :

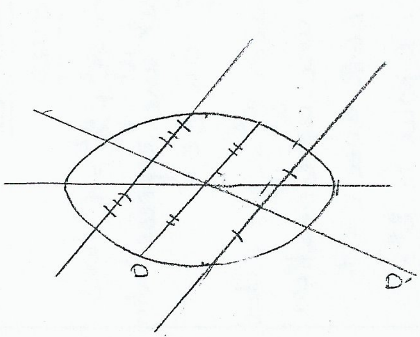
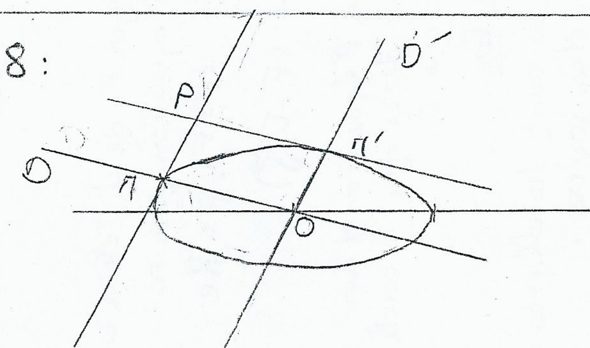


fig 8 :



References : Aud : Audin "Geométrie"

Tis : Tisseron "Geometrie affine, projective et euclidienne"

Lav : Laville "Geométrie pour le capes et l'agregation"

Mon : Monier "Geométrie MPS I"

GRI : Ercilomo.