133 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie

Cadre : Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace vectoriel, de dimension finie n, euclidien

I/ Endomorphisme adjoint

Déf/Prop : Soit $u \in End(E)$
$\exists!\, u^* \in End(E)$ tel que $\forall x, y \in E$, $\langle x | u(y) \rangle = \langle u^*(x) | y \rangle$. u^* est appelé adjoint de u

2) Propriétés

Prop : Soient $u, v \in End(E)$, F sev de E
On a les propriétés suivantes :

1. Si B bon de E, $mat_B(u^*) = {}^t mat_B(u)$
2. L'application $u \mapsto u^*$ est une involution linéaire
3. Si F est stable par u, $F^\perp$ est stable par u^*
4. $tr\, u = tr\, u^*$, $\det u = \det u^*$, $rg\, u = rg\, u^*$
5. $\|u\| = \|u^*\|$
6. $u \in GL(E) \Leftrightarrow u^* \in GL(E)$. Dans ce cas $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$
7. $Ker\, u^* = Im\, u^\perp$ $(Ker\, u)^\perp = Im\, u^*$

II/ Endomorphismes normaux

1) Définition et propriétés

Déf : $f \in End(E)$ est normale si $f \circ f^* = f^* \circ f$
$M \in M_n(\mathbb{R})$ est normale si $M\,{}^tM = {}^tM M$

Prop : Soit $u \in End(E)$

1. $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$
2. Si λ v.p de u et x v.p associé alors u^* admet λ pour v.p et x pour v.p associé
3. $u(F) \subset F \Leftrightarrow u^*(F) \subset F$
$u(F) \subset F \Leftrightarrow u(F^\perp) \subset F^\perp$

2) Réduction

Th : Soit $u \in End(E)$, u normal
Alors $\exists B$ bon de E, $mat_B(u) = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_p \end{pmatrix}$ avec D_i matrice carrée $\begin{cases} \text{soit d'ordre } 1 \\ \text{soit de la forme } \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, b \neq 0 \end{cases}$

3) Caractérisation

Prop : Sont équivalentes

1. u normal
2. $\exists P \in \mathbb{R}[X]$, $u^* = P(u)$
3. Tout endomorphisme qui commute avec u commute avec u^*

Th : (Inégalité de Schur)
Soit $u \in End(E)$, χ_u son polynôme caractéristique et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les racines complexes de χ_u répétées avec multiplicités, alors :
$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leq tr(u \circ u^*) = tr(u^* \circ u)$ avec égalité ssi u normal

III/ Endomorphismes orthogonaux

1) Définitions et premières propriétés

Déf : Soit $u \in End(E)$
On dit que u est orthogonal ssi $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$
ssi $\forall x, y \in E$, $\langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$

~~Rq~~ L'ensemble des endomorphismes orthogonaux est noté $O(E)$

Prop : l'ensemble des endomorphismes orthogonaux est un sous groupe de $G\ell(F)$

Rq : 1. $u \in O(E) \Rightarrow u$ normal

2. $u \in O(E) \Rightarrow \det u \in \{\pm 1\}$ et $sp_{\mathbb{R}}(u) \subset \{\pm 1\}$

On note alors $SO(E) = \{u \in O(E), \det u = 1\} \lhd O(F)$

Prop : $u \in O(E) \Leftrightarrow$ l'image de toute Bon par u est une Bon

$u \in O(E) \Leftrightarrow \forall \mathcal{B}$ Bon, $mat_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$ $({}^tPP = I_n)$

$u \in SO(E) \Leftrightarrow \forall \mathcal{B}$ Bon, $mat_{\mathcal{B}}(u) \in SO_n(\mathbb{R})$ $(P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\det P = 1)$

Ex les symetries orthogonales

$s \in O(E)$ diagonalisable ssi s symétrie orthogonale

2) **Resultats**

Prop $O(E)$ est compact et possède 2 composantes connexes à savoir $SO(E)$ et $\{u \in O(E), \det u = -1\}$. De plus ces deux composantes sont connexes par arcs

Definition : On appelle reflexion toute symetrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

On retournement est une symetrie orthogonale par rapport à un sev de dimension $n-2$

Prop (Action par conjugaison) :

On étudie l'action par conjugaison de $O(E)$ sur les symetries $\perp$

En notant $\Gamma_k = \{s$ symetrie $\perp$ par rapport à un sev de dimension $k\}$

Alors l'action est transitive sur Γ_k

Th : Soit $u \in O(E)$, $F_u = \mathrm{Ker}(u - Id)$, $p_u = \mathrm{codim}_{\mathbb{R}} F_u$

Alors u s'écrit comme produit de p_u reflexions et p_u est minimal pour cette propriété

$SO(E)$ est engendrée par les retournements et les retournements sont conjugués dans $SO(E)$

Csqe : $\forall n \geq 3$, $D(SO(E)) = O(E)$

3) **Etude des cas $n=2$ et $n=3$**

E_2 designera un plan vectoriel euclidien, E_3 est un espace euclidien de dimension 3

Prop : $O_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix}, \varepsilon \in \{\pm 1\}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$

$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$

Csq : $O_2(\mathbb{R})$ (et donc $O(E_2)$) groupe commutatif

$SO_2(\mathbb{R}) \simeq (\mathbb{U}, \times)$

Prop : $u \in O(E_3)$

$\exists \mathcal{B}$ Bon de E_3 telle que $mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$

Th : $u \in O(E)$

$\exists \mathcal{B}$ Bon de E, $mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \varepsilon_r & & \\ & & & R_1(\theta_1) & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & R_r(\theta_r) \end{pmatrix}$, $R_i(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$

Prop $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow SO_n(\mathbb{R})$ est surjective

Th : $SO(E_3)$ est simple) OVPT

IV) **Endomorphismes symétriques**

1) **Définitions et premières propriétés**

Def Soit $u \in \mathrm{End}(E)$

On dit que u symetrique (resp antisymetrique) si $u^* = u$ (resp $u^* = -u$)

Rq : u symetrique ssi $mat_{\mathcal{B}}(u) \in S_n(\mathbb{R})$

u antisymetrique ssi $mat_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Ex : u normal, les projecteurs orthogonaux

Prop : $End(E) = S(E) \oplus \mathcal{A}(E)$

Def : u symétrique positive $\Leftrightarrow \begin{cases} u \text{ symétrique} \\ (u(x)|x) \geq 0, \forall x \end{cases}$

u symétrique définie > 0 (sdp) $\Leftrightarrow \begin{cases} u = u^* \\ \forall x \neq 0, (u(x)|x) > 0 \end{cases}$

Prop : u s.p $\Leftrightarrow mat_B(u) \in S_n^+(\mathbb{R})$, $\forall B$ bon

u sdp $\Leftrightarrow mat_B(u) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\forall B$ bon

2) Réduction

Th (Spectral)

u symétrique $\Rightarrow \exists B$ bon de $(E, \langle , \rangle)$ formée de v.p de u. De plus les valeurs propres de u sont réelles

Corollaire

$M \in S_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists D$ diagonale, $P \in O_n(\mathbb{R})$, $M = {}^tPDP$

Cor : Soit u symétrique

u positif $\Leftrightarrow sp(u) \subset \mathbb{R}_+$

u sdp $\Leftrightarrow sp(u) \subset \mathbb{R}_+^*$

App : u symétrique ≥ 0 (resp sdp) alors $\exists \rho$ symétrique ≥ 0 (resp sdp) tel que $u = \rho^2$

Th : $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ homéomorphisme

Prop : f, g symétriques telles que $fg = gf$
Alors $\exists B$ bon de E qui diagonalise f et g simultanément

Th (Courant - Fischer)

Soit $u \in End(E)$ symétrique, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ses racines triées par ordre croissant comptées avec multiplicité. Alors

$$\lambda_k = \min_{\dim F = k} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\| = 1}} \langle u(x), x \rangle$$

3) Décomposition

Th : Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$

Alors $\exists ! (\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $M = \Omega S$

De plus $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ homéomorphisme

$(\Omega, S) \longrightarrow \Omega S$

Rq : Si $M \notin GL_n(\mathbb{R})$ on a existence mais on perd l'unicité

App : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité pour la norme matricielle subordonnée à $\| \|_2$

Th (Décomposition QR + Cholesky)

. Soit A symétrique définie positive
Alors $\exists !$ matrice L triangulaire inférieure $A = {}^tL L$

. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$
$\exists ! (Q, R)$, $Q \in O_n(\mathbb{R})$, R triangulaire supérieure à coef diag > 0
telle que $A = QR$

App : Inégalité d'Hadamard

Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ $A = (a_{i,j})$

Alors $\det A \leq \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$

Référence

X. Gourdon : "Les maths en tête" ; "Algèbre linéaire" Grifone ; "Tout l'algèbre de la licence" J.P Escofier

"Oraux X-ens" ; "Algèbre linéaire" M. Cognet