LEÇON 130 : Matrices symétriques, matrices hermitiennes.

H. Férrier
T. Liard

I / Matrices symétriques et hermitiennes, liens avec l'algèbre bilinéaire

[...au], p227...

① Formes bilinéaires / sesquilinéaires, formes quadratiques / hermitiennes

$\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-ev dans tout le plan

• déf : $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire) si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) et si elle est linéaire en ses 2 arguments (resp. linéaire à droite, sesquilinéaire à gauche).

Représentation matricielle : $\dim E = n$

- $\varphi(x,y) = \sum_{1 \le i,j \le n} x_i x_j \varphi(e_i, e_j) = {}^tXMY$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- $\varphi(x,y) = \sum_{1 \le i,j \le n} \bar{x}_i x_j \varphi(e_i, e_j) = {}^t\bar{X}MY$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $M = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \le i,j \le n}$ est la matrice de φ dans $\mathcal{B}$.

Formule de changement de Base : $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de E, $P = S_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$

$M' = {}^tPMP$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
$M' = {}^t\bar{P}MP$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
où M' est la matrice de φ dans $\mathcal{B}'$.

Rq : M et M' sont dites congruentes.

déf : la forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire) est symétrique (resp. hermitienne) si $\forall x,y \in E$ $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ (resp. $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$).

• déf : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($/ \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) est symétrique réelle (/ hermitienne) si ${}^tM = M$ ($/ {}^t\bar{M} = M$).

On note S_n ($/ \mathcal{H}_n$) le sev des matrices symétriques réelles (/ hermitiennes) [...] des matrices antisymétriques (/ antihermitiennes).

• Propriétés : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n \oplus \mathcal{A}_n$, $\dim S_n = \frac{n(n+1)}{2}$
$\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{H}_n \oplus i\mathcal{H}_n$, $\dim \mathcal{H}_n = n^2$ en tant que $\mathbb{R}$-ev

[Griff] p280 → Rq : les coefficients diagonaux d'une matrice hermitienne sont réels.

• Prop : (φ forme bilinéaire symétrique (/ sesqui. hermitienne)) $\Leftrightarrow$ ($M = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \le i,j \le n}$ est symétrique (/ hermitienne))

• déf : On appelle forme quadratique (/ hermitienne) associée à une forme φ bilinéaire symétrique (/ sesqui. hermitienne) toute application de la forme $q : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \varphi(x,x) \end{array}$.

φ est unique et appelée forme polaire de q.

Rq : - il est équivalent de se donner φ ou q
- Csq : une matrice symétrique (/ hermitienne) code une unique forme quadratique (/ hermitienne) et une unique forme bilinéaire symétrique (/ sesqui- hermitienne).
- Avec les notations précédentes : $q(x) = {}^tXMX$ ($/ {}^t\bar{X}MX$).

• déf : Une forme quadratique (/ hermitienne) est positive si $\forall x \in E$, $q(x) \ge 0$ et définie positive si en plus $(q(x) = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$. [Griff] p302

On note matriciellement : S_n^+ ($/ \mathcal{H}_n^+$) l'ensemble des matrices symétriques positives (/ hermitiennes positives) et ($/ \mathcal{H}_n^{++}$) celui des matrices symétriques déf. positives (hermitiennes déf positives).

② Classification des formes quadratiques (valable pour le cas hermitien) [Griff] p305

• Thm : $(M \in S_n) \Rightarrow \left(M \text{ congrue à } \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots \; a_{r_0} & \\ 0 & & \ddots \; 0 \end{pmatrix} \text{ où } a_i \in \mathbb{R}\right)$

Rq : - autrement dit il existe sur E des bases q-orthogonales (où q forme quadratique associée à M)
- $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, ${}^tPMP = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots a_{r_0} & \\ & & \ddots 0 \end{pmatrix}$ mais P n'est pas orthogonal, cela n'a donc rien à voir avec le thm spectral.
- en pratique on utilise la méthode de Gauss pour trouver les a_i.

• Cor : $(M \in \cancel{S_n}\ \mathcal{H}_n) \to \left(M \text{ congrue à } \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots 0 \end{pmatrix}\right)$

⚠ sur $\mathbb{C}$

[...X] p323

[...ff] p238

[...P] p67

[...ENS]$_3$ p14

- **Thm :** [Loi d'inertie de Sylvester]

  $(M \in S_n) \Rightarrow \left(M \text{ congrue à } \begin{pmatrix} \overbrace{1}^{p} & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \overbrace{-1}^{q} & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}\right)$

- **déf :** Cela permet de définir la signature de q la forme quadratique associée à M : $\text{sign}(q) = (p,q)$.

  → **exple** : $M = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ correspond à une forme quadratique de signature (n,n).

  - Application : classification des coniques : $\begin{cases} (2,0) \text{ ou } (0,2) \text{ ellipse} \\ (1,1) \text{ hyperbole} \\ (1,0) \text{ ou } (0,1) \text{ parabole} \end{cases}$

  Propriété : $(M \in S_n^{++}) \Leftrightarrow (\text{sign}(q) = (n,0))$

  Point de vue théorie des groupes : $Gl_n(\mathbb{R})$ agit sur S_n par congruence. Les orbites sont caractérisées par la signature.

II / Matrices symétriques et hermitiennes, liens avec l'algèbre linéaire

$(E, \langle .,. \rangle)$ espace euclidien ou hermitien, de dim n, on notera M^*, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de ${}^tM$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et ${}^t\overline{M}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1) Adjoint d'un endomorphisme

- **déf :** $u \in \mathcal{L}(E)$, $\exists!\, u^* \in \mathcal{L}(E) \mid \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$, $x, y \in E$

  u^* est l'adjoint de u.

  Rq : dans une base orthonormée (pour $\langle .,. \rangle$), si la matrice de u est M alors celle de u^* est M^*.

- **déf :** $u \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint si $u^* = u$ ($M^* = M$ dans une bon)

  Rq/déf : On a donc (u endomorphisme symétrique) $\Leftrightarrow$ (${}^tM = M$)

  (u endomorphisme hermitien) $\Leftrightarrow$ (${}^t\overline{M} = M$)

- **Propriété :** $\mathcal{L}(E) = S(E) \oplus A(E)$

- **Prop :** Si u est un endomorphisme symétrique et $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$

  Alors $\|u\| = \rho(u)$ le rayon spectral de sa matrice symétrique associée (sa plus grande valeur propre).

2) Réduction des matrices symétriques et hermitiennes.

[Gou] p266-26...

- **déf :** on note O_n ($/U_n$) l'ensemble des matrices orthogonales ($/$unitaires) qui vérifient $MM^* = I_n$.

- **Thm :** [Spectral]

  Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint alors il existe une bon de vecteurs propres pour u et ses valeurs propres sont réelles.

- **Cor :** [Matriciellement]

  Si $M \in S_n$ ($/M \in \mathcal{H}_n$) alors $\exists C \in O_n$ ($/U_n$) telle que

  $C^{-1}MC = C^*MC = D$ où D est diagonale réelle.

  DEV

- **Applications :** – Si $M \in S_n$ ($/\mathcal{H}_n$) alors $\exists!\, H \in S_n^+$ ($/\mathcal{H}_n^+$) $\mid M = H^2$. ← [X-ENS]$_3$ p107

  – $M \in S_n^+$ ($/S_n^{++}$) si ses valeurs propres sont positives ($/$strictement positives), de même pour dans $\mathbb{C}$.

  – $(M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \Rightarrow \left(\|M\|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}\right)$

Rq : La "lecture bilinéaire" de ce corollaire montre qu'il existe une base q-orthogonale (où q désigne la forme quadratique associée à M).

- **Application :** on dispose d'une nouvelle méthode que celle de Gauss pour trouver une base orthogonale pour q et pour en déterminer la signature,

  → **exple** : $q(x,y,z) = xy + yz + zx$ associée à $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour signature $(1,2)$ ← [MethodiX] p333

3) Pseudo-réduction simultanée

Voyons une nouvelle application du thm spectral généralisant la remarque précédente.

- **Thm :** Soient $M, N \in S_n$ ($/\mathcal{H}_n$) et M définie positive.

  Alors $\exists C \in Gl_n(\mathbb{K}) \mid C^*MC = I_n$ et $C^*NC = D$ diagonale réelle.

- **Applications :** – Inégalité de Minkowski : $A, B \in S_n^{++}$ d'ordre n.

  Alors $(\text{Det}\, A)^{1/n} + (\text{Det}\, B)^{1/n} \leq (\text{Det}(A+B))^{1/n}$

(3)

DEV — Ellipsoïde de John-Loewner : soit $K \subset \mathbb{R}^n$ compact d'intérieur vide. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

III. Etude topologique

① Premières propriétés (valable dans le cas hermitien)

[A] p101
- Prop : S_n est un sev fermé de $M_n(\mathbb{R})$
- Prop : S_n^+ est un semi-cône convexe fermé
- Prop : S_n^{++} est un ouvert dense dans S_n

[..]$_3$ p 33
Exo : $M \in M_n(\mathbb{R})$, $d(M, S_n)^2 = \frac{1}{4} \sum_{1 \le i,j \le n} (m_{ij} - m_{ji})^2$ avec $M = (m_{ij})_{1 \le i,j \le n}$

② Décomposition polaire

[M-T] p 19.20
- Thm : Les décompositions polaires $O_n \times S_n^{++} \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$, $(O, S) \longmapsto OS$ et $U_n \times \mathcal{H}_n^{++} \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$, $(U, H) \longmapsto UH$
  - Application : $O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des points extrémaux de $B_f(0,1)$ dans $M_n(\mathbb{R})$.

③ Exponentielle matricielle

[M-T] p 61-62

DEV
- Thm : $\exp : S_n \ (/ \mathcal{H}_n) \longrightarrow S_n^{++} \ (/ \mathcal{H}_n^{++})$ est un homéomorphisme
  - Application : avec la décomposition polaire on en déduit par exemple $GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ et $GL_n(\mathbb{C}) \simeq U_n \times \mathbb{R}^{n^2}$

④ Lemme de Morse

[Rou]
- Prop : Une matrice symétrique suffisamment proche d'une matrice symétrique non dégénérée lui est congrue.
  - Applications : - les matrices symétriques de signature (p,q) avec $p+q=n$ forment un ouvert de S_n.
    - Lemme de Morse : $f : U \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^3$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $0 \in U$ est un point critique quadratique non dégénéré ($df(0)=0$) et $d^2f(0)$ est non dégénéré de signature $(p, n-p)$.
    Alors $\exists\, x \mapsto u = \varphi(x)$ changement de coordonnées entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^1$, tq $\varphi(0) = 0$ et
    $f(x) = f(0) + u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$.

↳ Parler de $\rho = \sup \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2}$

IV. Quelques applications en analyse

① Recherche d'extrema

[Gou]$_2$
- Thm : U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$, $a \in U$ point critique. Notons $A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{ij}$ la hessienne de f en a, on a :
  a minimum (/maximum) relatif $\Rightarrow A \in S_n^+$ (/négative)
  $A \in S_n^{++}$ (/def négative) $\Rightarrow a$ minimum (/max) relatif

→ exple : en dimension 2, on note $A = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$, $\det A = rt - s^2$, on a
- $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ ($/ < 0$) $\Rightarrow a$ min (/max) relatif
- $rt - s^2 < 0$ $\Rightarrow a$ n'est pas un extremum
- $rt - s^2 = 0$ $\Rightarrow$ pas de conclusion

② Analyse numérique

a. Résolution de systèmes linéaires $Ax = b \in \mathbb{R}^n$:

[Sch] p 271
- Thm : [Factorisation de Cholesky]
  $A \in S_n^{++} \Rightarrow \exists ! B \in M_n(\mathbb{R})$ triangulaire inf. dont les coeff diagonaux sont > 0 | $A = B^t B$
- Méthode de relaxation : $A \in M_n(\mathbb{K})$, on pose $A = M - N$ avec $M = \frac{D}{\omega} - E$, $N = \frac{1-\omega}{\omega} D - F$
  où D est la diagonale de A, E triang. inf, F triang. sup.

DEV
Thm : Si $A \in \mathcal{H}_n^{++}$ et $\omega \in]0,2[$ alors la méthode itérative $\begin{cases} M x^{k+1} = N x^k + b \\ x^0 \in \mathbb{K} \end{cases}$ converge

→ exple : pour $\omega = 1$ la méthode de Gauss Seidel converge ($A \in \mathcal{H}_n^{++}$)

b. Optimisation

[H-U] p 66

DEV
- Inégalité de Kantorovich : $A \in S_n^{++}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $\|x\|^4 \le \langle Ax, x\rangle . \langle A^{-1}x, x\rangle \le \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2 \|x\|^4$ où λ_1 est la plus petite vap de A et λ_n la plus grande.
- Thm : $A \in S_n^{++}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle$
  Alors f a un unique minimum sur $\mathbb{R}^n$ noté $\bar{x}$. De plus, l'algorithme du gradient à pas optimal $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = x_k + t_k d_k \end{cases}$

↳ + Courant-Fischer (min max)

…ar manque de place nous n'avons pas pu parler de :

- problème aux valeurs propres (méthode QR, Jacobi) [Serre] [Allaire] ?
- mini-max [Serre] p 32

…our faire ce plan munissez vous de :

[Gou]$_1$ Gourdon - algèbre
[Gou]$_2$ Gourdon ... analyse
[Griff] Griffone
[MéthX] MéthodiX - algèbre
[X-ENS]$_3$ Oraux X-ENS Algèbre 3
[Szp] Szpirglas - L3
[M-T] Mneimné - Testard
[Rou] Rouvière
[Sch] Schatzman - Analyse numérique
[H-U] Hiriart-Urruty Optimisation et analyse convexe.

Serre les matrices
Allaire Grégoire Algèbre linéaire numérique