Tamaud

128 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents

On se place sur E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie n.

I Définitions

(1) On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E

(2) Deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{K})$ sont semblables si elles représentent le même endomorphisme f dans des bases différentes β_1 et β_2. ie : $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) \ / \ A = P^{-1}AP$

(3) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ on définit le polynôme caractéristique de A noté χ_A par :

$$\chi_A = \det(A - X I_n)$$

Les valeurs propres de A sont les racines de χ_A.

Si A et B sont semblables elles ont le même polynôme caractéristique ce qui permet de définir χ_f le polynome caractéristique de $f \in \mathcal{L}(E)$ comme celui d'une de ses représentation matricielle.

(4) Comme $\mathbb{K}$ est un corp, $\mathbb{K}[X]$ est principale ce qui permet de définir μ_A (resp μ_f) le polynôme minimal de $A \in M_n(\mathbb{K})$ (resp de $f \in \mathcal{L}(E)$) comme le générateur unitaire de l'idéal des polynome qui annulent A (resp f). (rmq : Par Cayley-Hamilton énnoncé plus loin, cet idéal est non **réduit** à $\{0\}$)

II Endomorphismes trigonalisables

Définition : • Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, f est trigonalisable si il existe une base β de E dans laquelle $Mat(f, \beta)$ est triangulaire supérieure

• Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, A est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure

Remarque : Si pour une base $\beta = (e_1, -, e_n)$ on a $Mat(f, \beta)$ est triangulaire inférieure alors dans $\beta' = (e_n, -, e_1)$, $Mat(f, \beta')$ est triangulaire supérieure

Matriciellement cela revient à conjuguer par

$$P = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & / & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix} \in GL_n(\mathbb{K})$$

Lemme : Tout endomorphisme (resp matrice) trigonalisable possède une valeur propre.

Proposition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $A \in M_n(\mathbb{K})$

- f trigonalisable
- χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$
- $\exists P \in \mathbb{K}[X] \ / \ P(f) = 0$ et P scindé sur $\mathbb{K}$
- μ_f est scindé sur $\mathbb{K}$

- A est trigonalisable
- χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$
- $\exists P \in \mathbb{K}[X] \ / \ P(A) = 0$ et P scindé sur $\mathbb{K}$
- μ_A est scindé sur $\mathbb{K}$

Corollaire : Sur $\mathbb{C}$ tous les endomorphismes sont trigonalisable

Corollaire : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable
Si F est un sous espace vectoriel stable par f
alors $f_{|F}$ est trigonalisable.

Application : Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_f(f) = 0$.

Lemme : Soit f et g dans $\mathcal{L}(E)$ qui commutent. Si f et g sont trigonalisable alors ils ont un vecteur propre en commun.

Théorème : Soit f et $g \in \mathcal{L}(E)$
Si f et g sont trigonalisables et commutent
Alors ils sont trigonalisables dans une même base

Corollaire Soit f et $g \in \mathcal{L}(E)$
Si f et g commutent et sont trigonalisable
Alors $f+g$ est trigonalisable

III Endomorphismes nilpotents

Définition : $\mathcal{N} := \{ f \in \mathcal{L}(E),\ \exists k \in \mathbb{N},\ f^k = 0 \}$
On appelle $\mathcal{N}$ l'ensemble des endomorphismes nilpotents
Si $f \in \mathcal{N}$ on définit l'indice de nilpotence de f comme le plus petit indice $k \in \mathbb{N}$ tq $f^k = 0$

Exemple :
- La dérivation dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$
- La composition à gauche par f un endomorphisme nilpotent.

Proposition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$
- $f \in \mathcal{N}$
- $\chi_f = (-1)^n X^n$
- $\mu_f = X^k$
- f trigonalisable avec 0 comme unique valeur propre

$\Updownarrow$

Remarque :
- Si $f \in \mathcal{N}$ alors $\mu_f = X^k$ où k est l'indice de nilpotence de f
- Sur $\mathbb{R}$, $Sp_{\mathbb{R}}(f) = \{0\}$ n'est pas suffisant
contre ex : $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Mat}(f, \beta)$, $\chi_f = -X(X^2+1)$

Proposition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$
$(\forall k \in \mathbb{N}^*\ \mathrm{Tr}(f^k) = 0) \iff f \in \mathcal{N}$

Application [Théorème de Burnside]
Tout sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini est fini

DEV 1

Proposition [Noyaux itérés]
Soit $f \in \mathcal{N}$, k son indice de nilpotence et $\forall i \in [\![0, k]\!]$ $F_i = \mathrm{Ker}\, f^i$. Alors
$\{0\} = F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_k = E$.

Corollaire
- Soit $f \in \mathcal{N}$ et k son indice de nilpotence alors $k \leq n$
- On a même mieux : $k \leq \mathrm{rang}(f) + 1$

Proposition : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

A est nilpotente $\iff$ 0 est dans l'adhérance de la classe de similitude de A

Proposition :

- $\mathcal{N}$ n'est pas un espace vectoriel
- $\mathcal{N}$ n'est pas stable pour l'addition
- $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$

IV Décomposition de Dunford

Théorème [des Noyaux]

Soient $P_1, \dots, P_l \in \mathbb{K}[X]$, $f \in \mathcal{L}(E)$

si les P_i sont deux à deux premiers entre eux alors

$$\mathrm{Ker}\left([P_1 \times \dots \times P_l](f)\right) = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathrm{Ker}\,(P_i(f))$$

DEV

Théorème [Décomposition de Dunford]

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, si f est trigonalisable il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tels que

- d diagonalisable
- n nilpotent
- d et n commutent
- $f = d + n$

Application :

- Sur $\mathbb{C}$, l'exponentielle est surjective sur $GL_n(\mathbb{C})$
- Existence de racine $n$ième sur $\mathbb{C}$.

Références :

- DEV 1 : Thèmes de géométrie groupes en situation géométrique, Alessandri
- DEV 2 : Algèbre linaire, Grifone
- Quelques X-ENS