125 - Sous-espaces stables d'un endomorphisme ou d'une famille d'endomorphismes en dimension finie. Applications

Références : [OA] Objectif Agreg.
[Go] Goblot, Algèbre linéaire
[S] Serre, Représentations linéaires de groupes finis.
[G] Gourdon, Algèbre
[X-ENS 2] Oraux X-ENS Algèbre 2
[Z-Q] Zuily-Queffelec.
[RDO 1 & 2] Ramis, Deschamps, Odoux Cours de Math 1 et 2.

Cadre : E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $u \in \mathcal{L}(E)$.

I - Utilisation de la notion de stabilité.

1) Définition et première application [OA]

Définition 1 Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$.

Exemple 1 : $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par u.

Application 1 [Trigonalisation par blocs] [Go]
Soient $F_0=\{0\} \subset F_1 \subset \dots \subset F_p = E$ une suite croissante de sous-espace stable.
$\forall 1 \leq k \leq p$, soit E_k un supplémentaire de F_{k-1} dans F_k.
Alors, on a $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ et la représentation matricielle de u dans cette décomposition est du type :
$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1p} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & u_{pp} \end{pmatrix}$$
où $u_{i,j} \in \mathcal{L}(E_j, E_i)$.
Inversement toute représentation matricielle triangulaire correspond à une suite croissante de sous-espaces stables $F_1 \subset \dots \subset F_p$ où $F_k = E_1 \oplus \dots \oplus E_k$.

Application 2 [Diagonalisation par blocs]. [Go]
La représentation matricielle de $u \in \mathcal{L}(E)$ relativement à une décomposition $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ est diagonale par blocs $\Leftrightarrow$ chacun des E_k est stable par u.

2) Endomorphismes induits [OA]

Soit F un sous-espace stable de u de dimension r.
La stabilité de F donne naissance à 2 endomorphismes :
* $u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$ la restriction de u à F ;
* $\bar{u} \in \mathcal{L}(E/F)$ obtenu par passage au quotient ;

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, hook] \arrow[d, "u_{|F}"'] & E \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, "u"] & E/F \arrow[d, "\bar{u}"] \\ F \arrow[r, hook] & E \arrow[r, two heads] & E/F \end{tikzcd}$$

Question : Quelles sont les propriétés de u dont héritent $u_{|F}$ et $\bar{u}$?

Proposition 1 : Soit $B=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E dont les r premiers vecteurs forment une base B_F de F. Soit B' le complémentaire de B_F dans B. Alors :
(i) la matrice de u dans la base B est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$;
(ii) $\pi(B')$ est une base de E/F notée $B_{E/F}$ et on a $A = \operatorname{mat}_{B_F}(u_{|F})$; $B = \operatorname{mat}_{B_{E/F}}(\bar{u})$;
(iii) $\chi_u = \chi_{u_{|F}} \times \chi_{\bar{u}}$ où χ_u désigne le polynôme caractéristique de u.

Application 3 :
* u nilpotent $\Leftrightarrow$ $u_{|F}$ et $\bar{u}$ sont nilpotents.
* χ_u irréductible $\Leftrightarrow$ u n'admet pas de sous-espace stable non trivial.

Remarque : $u_{|F}$ et $\bar{u}$ nuls $\not\Rightarrow$ u nul $\left(\left(\begin{array}{c|c} 0 & C \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\right)$.

Application 4 [Équation de Hill-Mathieu]. [Z-Q]
On considère l'équation différentielle :
$(*)$ $y'' + q y = 0$ où $q \in C^1_{\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est paire.
On considère le système fondamental de solutions (y_1, y_2) vérifiant $y_1(0)=1$, $y_1'(0)=0$ et $y_2(0)=0$, $y_2'(0)=1$.
On pose $T = y_1(\pi) + y_2'(\pi)$.
Alors : (i) Si $|T|<2$ toutes les solutions de $(*)$ sont bornées ;
(ii) Si $|T|=2$, alors $(*)$ possède une solution non nulle bornée ;
(iii) $|T|=2 \Leftrightarrow y_1'(\pi) \times y_2(\pi) = 0$;
(iv) Si $|T|>2$, alors toutes les solutions non nulles de $(*)$ sont non bornées.

3) Recherche de sous-espaces stables [OA]

Exemple 2 : Les sous-espaces propres de u sont stables par u.

[Go] **Remarque :** Par définition, le sous-espace propre $E_\lambda = \ker(u - \lambda id_E)$ est le plus grand sous-espace stable tel que l'endomorphisme induit par u soit l'homothétie de rapport λ.

Proposition 2 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors u admet au moins une droite ou un plan stable.

[Go] **Proposition 3 :** u est diagonalisable $\Leftrightarrow$ E est somme directe de sous-espaces propres.

[Go] **Application 5 :** Si u est diagonalisable, alors $u_{|F}$ et $\bar{u}$ sont aussi diagonalisables.

[Go] **Application 6 :** Soit u diagonalisable de sous-espaces propres $V_1, \dots, V_p$. Alors les sous-espaces stables par u sont du type $F = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ où $F_i \subset V_i$.

Proposition 4 : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors : (i) tout sous-espace propre de u est stable par v ;
(ii) $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v.

Application 7 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Comme $P(u)$ et u commutent, la proposition 4 implique que $\ker P(u)$ est stable par u.
On retrouve alors que les sous-espaces propres de u sont stables par u, ainsi que les sous-espaces caractéristiques.

Application 8 [Diagonalisation simultanée]. Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille d'endomorphismes commutant deux à deux. Alors il existe une base commune de diagonalisation pour les $(u_i)_{1 \leq i \leq p}$.

Application 9 [Décomposition de Dunford] [G] [R (X-ENS)] $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $n \geq 1$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\exists! (d, n)$ tel que
(i) d diagonalisable et n nilpotent ;
(ii) $u = d + n$ et $dn = nd$.
De plus d et n sont des polynômes en u.

4) Dualité et sous-espaces stables [OA]

Proposition 5 : Un sous-espace vectoriel F de E est stable par u $\Leftrightarrow$ $F^\perp$ est stable par ${}^t u$.

Remarque : Si de plus E est muni d'un produit scalaire, la proposition 5 s'adapte pour obtenir des sous-espaces stables par u^*.

En pratique : Pour les démonstrations par récurrence sur la dimension, ce résultat permet de diminuer la dimension de l'espace ce qui permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

Application 10 [Réduction des endomorphismes auto-adjoints] Soit E euclidien. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint. Alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour u.

Application 11 [Invariants de similitude] [G]

Définition 2 : On dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E = \{P(u)(x) ; P \in \mathbb{K}[X]\}$.

Théorème 1 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe une suite $F_1, F_2, \dots F_r$ de sous-espaces vectoriels de E, tous stables par u tels que :
(i) $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_r$;
(ii) $\forall 1 \leq i \leq r$, la restriction $f_i := f_{|F_i}$ est cyclique ;
(iii) Si π_i désigne le polynôme minimal de f_i, alors $\pi_{i+1} | \pi_i$ $\forall 1 \leq i \leq r-1$.
La suite des polynômes $\pi_1, \dots, \pi_r$ ne dépend que de u et non du choix de la décomposition. On l'appelle suite des invariants de similitude de u.

II - Endomorphismes définis avec la stabilité

1) Semi-simplicité [OA]

Définition 3 On dit que u est *semi-simple* si pour tout sous-espace F stable par u, il existe un supplémentaire de F stable par u.

Proposition 6 On note $\pi_u = P_1^{\alpha_1} \dots P_m^{\alpha_m}$ la décomposition du polynôme minimal de u en facteurs irréductibles.
Alors : (i) u diagonalisable $\Rightarrow$ u semi-simple ;
(ii) Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, u semi-simple $\Leftrightarrow$ u diagonalisable ;
(iii) Si u semi-simple, alors $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $\alpha_i = 1$;
(iv) Si $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que π_u irréductible, alors u est semi-simple ;
(v) u semi-simple $\Leftrightarrow$ π_u sans facteur carré.

Application 12 : Un endomorphisme nilpotent non nul n'est jamais semi-simple.

Application 13 : Si u est semi-simple, alors $u_{|F}$ et $\bar{u}$ sont semi-simples.

Application 14 [Dunford généralisé] (admis)
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\exists! (s, n)$ tels que :
(i) s semi-simple et n nilpotent ;
(ii) $u = s + n$ et $s \circ n = n \circ s$.

2) Sous-représentations [S]

Cadre : V espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$.
G un groupe fini.

Définition 4 Une représentation linéaire de G dans V est un homomorphisme $\rho : G \to GL(V)$.
Lorsque ρ est donné, on dit que V est une *représentation de G*.
On appelle n le *degré* de la représentation.

Proposition 7 Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation.
Soit W un sous-espace vectoriel de V.
On suppose que W est stable par les opérations de G, i.e. si $x \in W$, alors $\rho(s)(x) \in W$, $\forall s \in G$.
Alors $\rho_W : G \to GL(W)$ est une représentation linéaire de G dans W.

Définition 5 On dit que W est une *sous-représentation* de V.

Exemple 3 Soit g l'ordre de G.
Soit V un espace vectoriel de dimension $\dim G$ ayant une base $(e_t)_{t \in G}$ indexée par les éléments $t \in G$.
Si $s \in G$, on pose $\rho(s) : V \to V$ qui transforme e_t en e_{st}.
On vérifie qu'alors on obtient une représentation appelée *représentation régulière* de G.
Soit W le sous-espace de V de dimension 1 engendré par $x = \sum_{s \in G} e_s$. On a $\rho(s)(x) = x$ $\forall s \in G$. donc W est une sous-représentation de V.

Proposition 8 Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation.
Soit W un sous-espace stable par G. Alors il existe un supplémentaire W^0 de W dans V qui est stable par G.

Remarque : On dit que V est somme directe des représentations W et W^0 et on écrit $V = W \oplus W^0$.

Définition 6 Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation de G.
On dit qu'elle est *irréductible* si $V \neq \{0\}$ et si aucun sous-espace vectoriel de V n'est stable par G.

Remarque : Au vu de la proposition 8, cette définition équivaut à dire que V n'est pas somme directe de 2 représentations.

Application 15 [Théorème de Maschke] Toute représentation est somme directe de représentations irréductibles.