123. Déterminant. Exemples et Applications

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\dim E = n$.

I. Définitions et premières propriétés

Déf : $f : E^n \to \mathbb{K}$ est une forme n-linéaire alternée si : les n applications partielles sont linéaires et $x_i = x_j \Rightarrow f(x_1 \dots x_n) = 0$.

Th : L'ensemble des formes n-linéaires sur E est un $\mathbb{K}$-e.v de dimension 1. De plus, il existe une unique forme n-linéaire alternée valant 1 sur une base B donnée de E.

Déf : Cette forme n-linéaire alternée est appelée déterminant dans la base B, noté $\det_B$.

Prop : $\det_B(x_1 \dots x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{i,\sigma(i)}$

Cor : $\det_B$ est polynomial en ses arguments, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Déf : Le déterminant de $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le déterminant des vecteurs colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Cor : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A) = \det({}^tA)$

App : Les propriétés du déterminant énoncées par les lignes restent vraies pour les colonnes.

Cor : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\det(A \cdot B) = \det A \det B$

App-Déf : Le déterminant d'un endomorphisme est le déterminant d'une matrice le représentant dans une certaine base B.

II. Algorithmique du déterminant

1. Résultats sur les systèmes

Déf : Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle mineur de a_{ij} le déterminant Δ_{ij} de la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ième colonne de A.
Le scalaire $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ s'appelle le cofacteur de a_{ij}.
La matrice $(A_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ des cofacteurs est appelée comatrice de A, et est notée $\mathrm{Com}(A)$.

Prop : $A \cdot {}^t\mathrm{Com}(A) = \det(A)\, I_n$

Cor : $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

App : Systèmes de Cramer.
Soit (S) le système linéaire :

$$\begin{cases} a_{1,1} x_1 + \dots + a_{1,n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1} x_1 + \dots + a_{n,n} x_n = b_n \end{cases}$$

Soient $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B = (b_i)_{1 \le i \le n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $X = (x_i)_{1 \le i \le n}$, et A_i le i-ème vecteur colonne de A.
(S) admet une solution unique X pour tout B ssi $\det A \neq 0$.
Dans ce cas, $x_i = \dfrac{\det(A_1 \dots A_{i-1}, B, A_{i+1} \dots A_n)}{\det(A)}$

Rem : En pratique, la résolution pratique de systèmes linéaires fait rarement appel aux formules de Cramer.

2. Calculs pratiques

Prop : Le déterminant d'une matrice reste invariant en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.

Prop : Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A_{i,j}$ les cofacteurs. Le développement par rapport à la j-ième colonne est : $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \cdot A_{i,j}$.

Exemples : . déterminant de Van der Monde

Pour $n \geq 2$ et $a_1 .. a_n \in \mathbb{K}$, on note

$$V(a_1 .. a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Alors $V(a_1 .. a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$

. déterminant de Cauchy.

Pour $n \geq 2$ et $a_1 .. a_n, b_1 .. b_n \in \mathbb{K}$ tels que $a_i + b_j \neq 0$ pour tous i et j, le déterminant de $\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est

$$\frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i,j \leq n} (a_i + b_j)}.$$

. déterminant circulant. $P(X) = \sum_{k=1}^{n} a_k X^{k-1}$.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ & & \ddots & \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{vmatrix} = P(1) \cdot P(\omega) \cdot \dots \cdot P(\omega^{n-1})$$

où $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$

App : Pivot de Gauß

Le pivot de Gauß permet de se ramener à une matrice triangulaire à l'aide d'opérations préservant le déterminant.

Par développements, si A est triangulaire, $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

La complexité du pivot de Gauß est en $O(n^3)$, alors que le calcul direct par développements est en $O(n!)$.

III. Le déterminant en algèbre et géométrie.

1. Une expression de volume

Prop : Soient μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et X une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$.

Alors $\mu(u(X)) = |\det u| \, \mu(X)$

Ex : Soient $v_1 .. v_n \in \mathbb{R}^n$, et $P(v_1 .. v_n)$ le parallélépipède engendré par $v_1 .. v_n$.

Alors $\mu(P(v_1 .. v_n)) = |\det(v_1 .. v_n)|$

2. Orientation de l'espace

Déf : Soit $\varphi \in GL_n(\mathbb{R})$. On dit que φ préserve (resp. renverse) l'orientation si $\det \varphi > 0$ (resp. < 0).

Exemples : . les rotations préservent l'orientation.

. les réflexions orthogonales renversent l'orientation.

Déf : Deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont même orientation s'il existe $\varphi \in GL_n(\mathbb{R})$ préservant l'orientation, envoyant $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}'$.

3. Une caractérisation de polygones

Prop : Soient $a_0 .. a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. On pose $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ et $\Omega = \left(\omega^{i(j-1)}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{n-2,n}(\mathbb{C})$.

Alors les points $a_0 .. a_{n-1}$ forment un polygone régulier convexe direct ssi $\Omega A = 0$.

[DVT]

4. Déterminant de Gram

Déf : Soit H un espace préhilbertien. Soient $x_1, \dots x_n \in H$. On appelle matrice de Gram la matrice $(\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$, et déterminant de Gram son déterminant, noté $G(x_1, \dots x_n)$.

Prop : Soit V un sous-espace de H muni d'une base $(e_1, \dots e_n)$. Soit $x \in E$. Alors $d^2(x, V) := \left(\inf_{y \in V} \|x - y\| \right)^2 = \dfrac{G(x, e_1, \dots e_n)}{G(e_1, \dots e_n)}$.

5. Résultant

Déf : Soient $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $Q \in \mathbb{K}_m[X]$.

Soit $\varphi : \mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X] \to \mathbb{K}_{n+m-1}[X]$
$(U, V) \mapsto UP + VQ$.

On appelle résultant de P et Q le déterminant de φ, noté $\text{Rés}(P, Q)$.

Prop : P et Q sont premiers entre eux ssi $\text{Rés}(P, Q) \neq 0$.

App : P a une racine double ssi $\text{Rés}(P, P') = 0$.

6. Polynôme caractéristique

Déf : Soit A un anneau commutatif, et soit $U = (u_{ij}) \in \mathcal{M}_n(A)$.

On appelle déterminant de U l'élément de A défini par $\det(U) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} u_{i, \sigma(i)}$.

Déf : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de M le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $\chi_M(X) = \det(M - XI_n)$

Prop : Les racines de χ_M sont exactement les valeurs propres de M.

IV. Le déterminant en topologie et analyse.

Prop :
- $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert
- $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe

Prop : Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, U mesurable, et φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V de jacobien $J(\varphi)$ borné. Alors $V = \varphi(U)$ est mesurable, et pour toute fonction continue et bornée $f : V \to \mathbb{R}$:

$$\int_V f(v)\,dv = \int_U f \circ \varphi(u)\, |J(\varphi)(u)|\, du.$$

Th : de Müntz

Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$. Soit $(\alpha_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ strictement croissante. Soit $V = \text{Vect}\left((x \mapsto x^{\alpha_n})_{n \in \mathbb{N}}\right)$. Sont équivalentes :
- V dense dans $\mathcal{C}$
- $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge

[DVT]

Bibliographie :

- X. GOURDON. Algèbre / Analyse
- J. GRIFFONE. Algèbre linéaire et bilinéaire
- R. GOBLOT. Algèbre linéaire
- Objectif Agreg.

Développements alternatifs

- Frobenius - Zolotarev
- Résultant
- Van der Monde + Cauchy + circulant
- Brauer
- Cayley - Menger [Bergé - Géométrie]
- Droites barycentriques
- Ellipsoïde de John - Loewner