120 : DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL (ON SE LIMITERA AU CAS DE LA DIMENSION FINIE). RANG. EXEMPLES ET APPLICATIONS

<u>cadre</u> : Dans toute la leçon, E désigne un $\mathbb{K}$-ev sur un corps commutatif $\mathbb{K}$

I°) FAMILLE DE VECTEURS. [RDO]

1.1. Familles libres, génératrices, bases

<u>Déf</u> : . Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite <u>génératrice</u> si $\mathrm{Vect}(x) = E$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E,\ \exists (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \text{ telle que } x = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i$$

. $(x_i)_{i\in I}$ est dite <u>libre</u> si :

$$\forall (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)},\ \left(\sum_{i\in I} \alpha_i x_i = 0\right) \Rightarrow (\forall i \in I,\ \alpha_i = 0)$$

. La famille est dite <u>liée</u> si elle n'est pas libre

<u>Prop</u> : (i) Toute sous-famille d'une famille libre est libre
(ii) ——— sur-famille ——— génératrice est génératrice
(iii) Toute famille $(x_i)_{i\in I}$ dont l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres est liée

<u>Déf</u> : on dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une base de E (ssi) c'est une famille à la fois libre et génératrice.

<u>Ex</u> : . Soit I un ensemble quelconque. On définit la famille d'éléments $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i\in I}$ en posant $\varepsilon_k = (\delta_{ik})_{i\in I}$. ε est une base de $\mathbb{K}^{(I)}$ appelée base canonique de $\mathbb{K}^{(I)}$.
. $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$

<u>Prop</u> : . Si $(x_i)_{1\le i\le n}$ est une famille génératrice, alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.
. Si $(x_i)_{1\le i\le n}$ est libre, alors toute famille génératrice est composée d'au moins n vecteurs

<u>Déf</u> : on appelle <u>espace vectoriel de dimension finie</u> tout espace vectoriel admettant au moins une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

1.2. Espaces de dimension finie

<u>Thm de la base incomplète</u> : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice quelconque et $J \subset I$ tel que $(e_i)_{i\in J}$ soit une famille libre. Alors il existe un ensemble L vérifiant $J \subset L \subset I$ tel que $(e_i)_{i\in L}$ soit une base de E

<u>Corollaire</u> : soit ℓ un système libre et $\mathcal{S}$ une famille génératrice. Alors on peut compléter ℓ en une base, en utilisant exclusivement des éléments de $\mathcal{S}$

<u>Thm-Déf</u> : Dans un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie, il existe des bases, elles sont toutes finies et ont un cardinal commun, qu'on appelle <u>dimension</u> de l'espace vectoriel et notée dim E.

<u>Ex</u> : . $\dim(\mathbb{K}^n) = n$
. Influence du corps de base : $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.
. $\mathbb{K}_{n-1}[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \le n-1\}$ est de dimension n.
. L'ensemble des solutions du système différentiel $Y'(t) = A(t)Y(t)$ où $t \mapsto A(t) \in M_n(\mathbb{C})$ est continue et de dimension n.

<u>NB</u> : Puisque la dimension est un entier naturel, elle permet de faire des preuves par récurrence.
→ applications : . diagonalisation (simultanée, d'un endomorphisme symétrique, etc...)
. recherche de générateurs

<u>Déf</u> : Soit $(x_i)_{i\in I} \in E^I$. On appelle <u>rang</u> de $(x_i)_{i\in I}$ la dimension de $\mathrm{Vect}((x_i)_{i\in I})$ dans $\mathbb{K}$.

<u>Thm</u> : Deux espaces vectoriels de dimensions finies sont isomorphes (ssi) ils sont sur le même corps $\mathbb{K}$ et ont même dimension

<u>Thm</u> : Si E et F sont des $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies p et n, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est isomorphe à $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et donc $\dim \mathcal{L}(E,F) = np$

1.3. Sous-espaces d'un ev de dimension finie

Dans toute la suite de la leçon, E désigne un ev de dimension finie n.

<u>Thm</u> : Soit F un sous-espace de E. Alors F est de dimension finie p telle que $p \le n$ avec égalité (ssi) $F = E$.

<u>Thm</u> : Tout sous-espace F de E admet au moins un supplémentaire et pour tout supplémentaire G de F, on a :

$$\dim F + \dim G = \dim E$$

<u>Formule de Grassmann</u> : Soient F et G deux ssev de E, alors

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G).$$

<u>Thm</u> : Si $E = F \times G$, alors $\dim E = \dim F + \dim G$

1.4. Dualité [GRIF.]

<u>Déf</u> : on appelle espace dual de E, et on note E^*, l'ensemble $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ des formes linéaires de E.

<u>Thm</u> : Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est caractérisée par l'image d'une base de E.

<u>Prop</u> : $\dim E = \dim E^*$, par conséquent E et E^* sont isomorphes (car on travaille en dimension finie)

<u>Thm</u> : Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. On considère les formes linéaires $(f_1,\dots,f_n)$ définies par $f_i(e_k) = \delta_{ik}$, alors $(f_1,\dots,f_n)$ est une base de E^* dite <u>base duale</u> de $(e_1,\dots,e_n)$. On la note souvent $(e_1^*,\dots,e_n^*)$

[Bidual] $E^{**} := (E^*)^*$
c'est-à-dire $E^{**} = \mathcal{L}(E^*, \mathbb{K})$.

Prop: E^{**} est canoniquement isomorphe à E.

Déf: soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de E^*. Il existe une unique base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que pour tout i, $e_i^* = f_i$. Cette base s'appelle la <u>base antéduale</u> de $(f_1, \dots, f_n)$.

Déf: • Si $F \subset E$, on note $F^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in F, \varphi(x) = 0\}$. C'est un ssev de E^*, appelé <u>orthogonal</u> de F.
• Si $G \subset E^*$, on note $B^0 = \{x \in E \mid \forall \varphi \in G, \varphi(x) = 0\}$. C'est un ssev de E appelé <u>annulateur</u> de G.

Thm: • Soit F un sous-espace de E: $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$
• Soit G ______________ E^*: $\dim E = \dim G + \dim G^0$

<u>Dualité et formes quadratiques</u>

Déf: une application $q : E \to \mathbb{K}$ est dite <u>forme quadratique</u> s'il existe une application bilinéaire symétrique $s : E \times E \to \mathbb{K}$ telle que $q(x) = s(x, x)$.

Déf: L'application linéaire associée à s est : $j_s : E \longrightarrow E^*$, $y \longmapsto s(\cdot, y)$

Ainsi pour F sous-ensemble de E, on a :
$$F^\perp := \{y \in E \mid s(x, y) = 0 \ \forall x \in F\}$$

• Un ssev F de E est dit <u>isotrope</u> si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$
• ______________ <u>totalement isotrope</u> (SETI) si $\forall x \in F$, $q(x) = 0$
• on appelle <u>SETIM</u> tout SETI maximal pour l'inclusion

Prop: Tous les SETIM ont même dimension

Déf: Une base $\{e_i\}$ de E est dite <u>orthogonale</u> pour q (ou s) si : $s(e_i, e_j) = 0 \ \forall i \neq j$.
Elle est dite <u>orthonormée</u> si $s(e_i, e_j) = \delta_{ij}$

Prop: Il existe toujours sur E des bases orthogonales pour q

* <u>classification des formes quadratiques sur un $\mathbb{C}$-ev</u>
Soient E un ev de dimension n sur $\mathbb{C}$ et q une forme quadratique sur E. Il existe alors une base $\{e_i\}$ telle que dans cette base :
$$M(q)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

* <u>classification des formes quadratiques sur un $\mathbb{R}$-ev</u>
Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n et q une forme quadratique sur E. Alors il existe une base $\mathcal{B}$, dite de Sylvester, telle que : $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Thm: soit $\mathcal{B}$ une base ...
$s = \max\{\dim F \mid F$ ssev de E et $q|_F$ définie positive$\}$
$t = \max\{\dim F \mid$ ______________ définie négative$\}$
(s, t) est appelée <u>signature</u> de q.

II) RANG ET APPLICATIONS LINÉAIRES

2.1. <u>Rang d'une application linéaire</u> [COG]

Dans la suite, on pose $\dim F = p$.

Déf: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si l'image de f est de dimension finie r, on dit que f est de rang fini r et on note $\mathrm{rg}\, f = r$

Prop: i) $\mathrm{rg}\, f < +\infty$ dès que E ou F est de dimension finie
ii) $\mathrm{rg}\, f = n$ (ssi) f est injective
iii) $\mathrm{rg}\, f = p$ (ssi) f est surjective

<u>Thm du rang</u>: Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\dim E = \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \mathrm{rg}\, f$
→ <u>application</u>: $\mathrm{rg}\, f \leq \inf(\dim E, \dim F)$

<u>Corollaire</u>: soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a :
(f injective) $\Leftrightarrow$ (f surjective) $\Leftrightarrow$ (f bijective) $\Leftrightarrow$ ($\mathrm{rg}\, f = n$)

⚠ Ce résultat est faux en dimension infinie :
<u>contre-ex</u>: $f : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$, $P \longmapsto P'$

<u>Thm de Skolem-Noether</u>: Les automorphismes de $M_n(\mathbb{K})$ sont les automorphismes intérieurs.

2.2. <u>Rang d'une matrice</u>.

Déf: On appelle <u>rang d'une matrice</u> M, et on note $\mathrm{rg}\, M$, le rang de la famille constituée par ses vecteurs colonnes

Prop: $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r (ssi) tous les déterminants extraits de A de taille $r+1$ sont nuls et s'il en existe un de taille r non nul.
→ <u>application</u>: $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$

<u>Thm des extrema liés</u>: Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $p \geq 1$ et $f, g_1, \dots, g_p \in C^1(U, \mathbb{R})$. Posons :
$$A = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}$$
Si f_A admet un extremum relatif en $a \in A$ et si les formes linéaires $dg_{1a}, \dots, dg_{pa}$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que :
$$df_a = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \, dg_{ka}$$ [OUPT]

→ <u>application</u>: $SO(n)$ est l'ensemble des éléments de $SL_n(\mathbb{R})$ de norme $\|\cdot\|_2$ minimale.

2.3. <u>Action de Steinitz</u> [OUPT]

Déf: on définit une action de $G = GL_p(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$ sur $M_{p,n}(\mathbb{K})$ par l'opération suivante :

$\forall ((P,Q),M) \in G \times M_{n,p}(\mathbb{K})$, $(P,Q).M = PMQ^{-1}$

Cette action est appelée l'action de Steinitz

Déf : Deux matrices A et B de $M_{p,n}(\mathbb{K})$ qui appartiennent à la même orbite sous cette action sont dites équivalentes, et on note $A \sim B$

Thm : soit $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ et soit $r = rg(A)$. Alors $A \sim J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (n, p)

Corollaire : $A \sim B \Leftrightarrow rg A = rg B$.

Corollaire : $O_r(\mathbb{K}) = \{A \in M_{p,n}(\mathbb{K}) \mid rg A = r\}$

$O_r(\mathbb{C})$ est connexe $\forall r \in [\![0, \min(p,n)]\!]$

$O_r(\mathbb{R})$ est connexe $\forall r \in [\![0, \min(p,n) - 1]\!]$

Thm : $\overline{O_r} = \coprod_{k \leq r} O_k$

III) CALCUL EFFECTIF DU RANG VIA LE PIVOT DE GAUSS [GRIF.]

3.1 Méthode

Principe : Par une succession d'opérations élémentaires qui ne changent pas le rang d'une matrice, on se ramène à une matrice triangulaire (ou échelonnée) dont on sait calculer le rang par simple lecture

- Etape ⓪ : on supprime dans la matrice A les lignes (ou les colonnes) nulles et toute ligne (ou colonne) colinéaire à une autre.
- Etape ① : En permutant les lignes ou les colonnes, on se ramène à une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & * \\ * & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}$ avec $a_{11} \neq 0$ (le pivot)
- Etape ② : $\forall i \in [\![2, n]\!]$, on effectue $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1$

  on obtient $A' = \left(\begin{array}{c|c} a_{1,1} & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right)$

on réitère le processus avec B si elle ne contient pas que des 0, sinon c'est fini. Etc...

3.2. Rang et systèmes linéaires

La dimension des solutions d'un système linéaire est lié au rang de la matrice et peut être déterminée via la méthode précédente. Soit $AX = Y$ avec $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ une équation linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$

- Si $rg A = n$, le système possède des solutions pour tout Y.
- Si $rg A < n$, le 2nd membre doit vérifier des conditions de compatibilité
- Si $rg A = p$, la solution (si elle existe) est unique
- Si $rg A < p$, il y a une infinité de solutions.
- Si $rg A = p = n$, il y a une solution unique pour tout Y (système de Cramer)

IV) EXTENSIONS DE CORPS. [PER.]

Soient K et L deux corps

Déf : on dit que L est une extension de K si $K \subset L$ et on note L/K

Déf : L est muni d'une structure de K-ev. On appelle degré de l'extension la dimension de L comme K-ev. On note :

$[L:K] = \dim_K L$.

Ex : $\mathbb{F}_{p^n}$ est un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-ev de dimension n.

Thm (multiplicativité des degrés) : Soient $K \subset L \subset M$ trois corps $[M:K] < \infty \Leftrightarrow [M:L] < +\infty$ et $[L:K] < +\infty$. De plus, on a :

$[M:K] = [M:L][L:K]$

Déf : on suppose $K \subset L$.

- $\alpha \in L$ est dit algébrique sur K, s'il existe $P \in K[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(\alpha) = 0$
- L/K est dit algébrique si $\forall \alpha \in L$, α est algébrique sur K.
- Dans le cas où α est algébrique, l'ensemble des polynômes P de $K[X]$ tels que $P(\alpha) = 0$ est un idéal de $K[X]$ engendré par un unique polynôme irréductible unitaire appelé le polynôme minimal de α $\pi_{\alpha/K}$

Prop : soit L une extension de K, $M \in M_n(\mathbb{K})$. Alors :

$rg_L(M) = rg_K(M)$

Déf : on dit qu'un élément $\alpha \in \mathbb{C}$ est un entier algébrique s'il est algébrique et si son polynôme minimal appartient à $\mathbb{Z}[X]$

Prop : L'ensemble des entiers algébriques forment un anneau.

Prop : Soient $K \subset L$ et $\alpha \in L$.

α algébrique $\Leftrightarrow \dim_K K[\alpha] < +\infty$.

Dans ce cas $\dim_K K[\alpha] = \deg \pi_{\alpha/K}$

Ex : $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j) : \mathbb{Q}] = 6$

V) PROPRIETES TOPOLOGIQUES DE LA DIMENSION FINIE [GO

Thm : L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est complet

Prop : Dans un evn de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Thm : Soient E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors f est continue.

Thm de compacité de Riesz :

(E est de dimension finie) $\Leftrightarrow$ ($B_E(0,1)$ est compacte)

Ref : Ramis-Warusfel
Grifone
Gourdon
Perrin