Réf : [X-ENS] : Francinou, Gianella, Nicolas : algèbre 1 et 2
[SER] : Serre : Les matrices
[Gou] : Gourdon : Algèbre
[M] : Mneimné : Réduction des endomorphismes
[OA] : Objectif agreg
[DEL] : Delcourt : théorie des groupes
[GRI] : Grifone : Algèbre linéaire

développements possibles : •

Leçon 119 : Exemples d'actions de groupe sur les espaces de Matrices.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I. Actions par multiplication :

1. Action de $GL_n(\mathbb{K})$.

[X-ENS]

$GL_n(\mathbb{K})$ agit à gauche (resp. à droite) sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (resp. sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$) : $GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (resp. $(P,M) \longmapsto M.P = MP$). $(P,M) \longmapsto P.M = PM$. (*)

Prop : Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (resp $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$) sont dans la même orbite ssi elles ont même noyau (resp. même image).

2. Action de $U_n(\mathbb{C})$.

[SER]

$U_n(\mathbb{C})$ agit à droite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $U_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $(U,M) \longmapsto M \cdot U$

Prop : Toute matrice de $GL_n(\mathbb{C})$ admet une unique matrice $H \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ dans son orbite.

Applic : Décomposition polaire : •

Pour tout $M \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe un unique couple $(H,U) \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \times U_n(\mathbb{C})$ tel que $M = HU$.

Rq : On a le même résultat dans $\mathbb{R}$: $\forall M \in GL_n(\mathbb{R})$, $\exists! (S,O) \in S_n(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R})$, $M = SO$.

3. Action de $\mathfrak{S}_n$.

[DEL]

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit la matrice de permutation $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Prop : $\mathcal{P} = \{P_\sigma, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_n$.

$\mathfrak{S}_n$ agit à gauche (resp à droite) sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$) : $\mathfrak{S}_n \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
$(\sigma, M) \longmapsto \sigma \cdot M = P_\sigma M$
resp. $(M,\sigma) \longmapsto M \cdot \sigma = M P_\sigma$.

Prop : Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$) sont dans la même orbite ssi elles ont les mêmes lignes (resp. mêmes colonnes) à permutation près.

4. Action de $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$:

$GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$ agit sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $(P,Q) \times M \mapsto PMQ^{-1}$

Prop : Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dans la même orbite ssi elles ont même rang. [GA]

Il y a donc $\min(n,p)+1$ orbites dont un système de représentants est $\{J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), r \in [\![0,m]\!]\}$

Applic : $\overline{GL_n(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; $\overline{Orb(J_r)} = \bigsqcup_{k=0}^{r} Orb(J_k)$; [OA]
toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est somme de deux matrices inversibles ; M et ${}^tM$ sont dans la même orbite ; si $n \geq 2$ tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$; si $r \leq n-1$, $Orb(J_r)$ est connexe dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. [X-ENS]

4.2. Si on se place dans A anneau euclidien, $GL_n(A) \times GL_p(A)$ agit sur $\mathcal{M}_{n,p}(A)$ de la même façon : $(P,Q) \times M \longmapsto PMQ^{-1}$.

Thé : des facteurs invariants : •

Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(A)$, alors il existe $(d_1, \dots, d_s) \in A^s$, tels que $d_1 | \dots | d_s$ et que M soit dans l'orbite [SER] de $\left(\begin{array}{c|c} d_1 \ddots d_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. Si, de plus, M est dans l'orbite de $\left(\begin{array}{c|c} d'_1 \dots d'_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, avec $d'_1 | \dots | d'_r$, alors $r = s$ et $\forall i \in [\![1,s]\!]$, les d_i et d'_i sont associés.

Coq : Un système de représentants des orbites s'injecte dans $\left\{\left(\begin{array}{c|c} d_1 \ddots d_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), s \in [\![0,n]\!], \forall i \in [\![1,s]\!]\ d_i \neq 0, d_1 | \dots | d_s\right\}$.

Rq : Si A est un corps, on retrouve le système de représentants vu au dessus. (##)

Thé : Soit $A_0, A_1 \in GL_n(\mathbb{K})$, $B_0, B_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors [SER] $XA_0 + B_0$ et $XA_1 + B_1$ sont dans la même orbite (où $A = \mathbb{K}[X]$) ssi il existe $G, H \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $GA_0 = A_1 H$ et $GB_0 = B_1 H$.

Coq : si $A_0 = A_1 = I_n$, $G = H$, et on a un lien entre les orbite de cette action et de l'action suivante, ie entre matrices semblables et matrices équivalentes.

II. Actions par conjugaison :

1. Action de $GL_n(\mathbb{K})$.

$GL_n(\mathbb{K})$ agit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par conjugaison : $(P,M) \mapsto PMP^{-1}$

[GOU]

Thm : Réduction de Frobénius : •

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une unique famille de polynômes unitaires non constants $(P_1, \dots, P_s)$ tels que $P_s | \dots | P_1$ et que A soit dans l'orbite de $\begin{pmatrix} C_{P_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{P_s} \end{pmatrix}$ où $\forall i \in [\![1,s]\!]$, C_{P_i} est la matrice compagnon du polynôme $P_i = a_0 + \dots + a_n X^n$: $C_{P_i} = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Csq : Deux matrices sont dans la même orbite ssi elles ont même invariants de similitude : les $P_s | \dots | P_1$. Un système de représentants des orbites est $\left\{ \begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_s} \end{pmatrix}, s \in [\![1,n]\!], P_s | \dots | P_1 \text{ non constants unitaires} \right\}$.

[SER]

Prop : Réduction de Jordan : •

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, deux matrices sont dans la même orbite ssi $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall k \in \mathbb{N}$, $rg(A - \lambda I_n)^k = rg(B - \lambda I_n)^k$.

Un système de représentants des orbites est

$\left\{ \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}, s \in [\![1,n]\!], \forall i \in [\![1,s]\!], J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix} \text{ bloc de Jordan associé à la valeur propre } \lambda_i \right.$

$\left. \forall i < j, \text{ soit } \lambda_i < \lambda_j, \text{ soit } \lambda_i = \lambda_j \text{ et taille } J_i \leq \text{taille } J_j \right\}$

Applic : M et ${}^tM$ sont dans la même orbite.

Prop :
- $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est scalaire ssi son orbite est bornée.
- $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable ssi son orbite est fermée.
- $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente ssi $0 \in \overline{Orb(M)}$.
- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les orbites sont connexes par arcs.
- $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable ssi son orbite contient une matrice symétrique.
- • $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $Tr(M) = 0$, alors $\exists B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = BC - CB$.
- $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, M est une homothétie ssi $Orb(M) = \{M\}$

Prendre une Relondu sur $\mathbb{C}$ (pas compatible a/c la structure de corps!)
[X-ENS]

2. Action de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}$.

$\mathcal{P}$ agit sur lui même par conjugaison : $(P_\tau, P_\sigma) \mapsto P_\tau P_\sigma P_\tau^{-1} = P_\tau P_\sigma P_{\tau^{-1}}$

Thm : de Brauer •

P_σ et P_τ sont dans la même orbite ssi σ et τ sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$

[OA]

Csq : Il y a $p(n)$ orbites, où $p(n)$ est le nombre de partitions de n ; ie le nombre de façon d'écrire $n = \sum_{i=1}^{k} m_i$, $m_1 \geq \dots \geq m_k$.

3. Réduction des isométries.

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ agit sur lui même par conjugaison : $(P,M) \mapsto PMP^{-1}$

[GOU] [GO]

Prop : Un système de représentant des orbites est

$\left\{ \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R_{\theta_r} & & & \\ & & & \varepsilon_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \varepsilon_s \end{pmatrix} r, s \in [\![1,n]\!], \forall i \in [\![1,r]\!], R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} \text{ avec } \theta_i \not\equiv 0 [\pi], \forall i \in [\![1,s]\!], \varepsilon_i = \pm 1, \; r + s = n \right\}$

Applic : $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

4. Réduction des matrices unitaires.

$U_n(\mathbb{C})$ agit sur lui même par conjugaison : $(U,M) \mapsto UMU^{-1}$

[GOU] [GO]

Prop : Un système de représentant des orbites est $\left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}, \theta_i \in \mathbb{R} \right\}$

5. Réduction des matrices symétriques.

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ agit sur $S_n(\mathbb{R})$ par conjugaison : $(P,S) \mapsto PSP^{-1}$.

Prop : Chaque orbite contient une matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ où les $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

[OA]

Applic : toute matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$ a une racine carrée : si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, il existe un unique $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ tq $A = B^2$.

Rq : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a une réduction des matrices hermitiennes identique : $U_n(\mathbb{C}) \times H_n(\mathbb{C}) \to H_n(\mathbb{C})$, $(U, H) \mapsto UHU^{-1}$, chaque orbite contient une $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ valeur propre de H.

[GOU] [GO]

6. Réduction des matrices normales.

$\mathcal{N}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, M\,{}^tM = {}^tM\,M\}$ les matrices normales.

$O_n(\mathbb{R})$ agit sur $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ par conjugaison : $(O,M) \mapsto OMO^{-1}$

[GOU] **Prop** : chaque orbite contient une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix} \text{ où } \forall i \in [\![1,r]\!],\ \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ et } \forall i \in [\![1,s]\!],\ \tau_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Rq : M et ${}^tM$ sont dans la même orbite.

III. Actions par congruence :

1. Action de GL_n.

a. $GL_n(\mathbb{K})$ agit à droite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par congruence :

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$(M,P) \mapsto M\cdot P = {}^tPMP$

[M] **Prop** : Deux matrices sont dans la même orbite ssi leurs parties symétrique et antisymétrique sont dans la même orbite.

b. $GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$) agit sur $S_n(\mathbb{R})$ (resp. $H_n(\mathbb{C})$) par congruence $(S,P) \mapsto S\cdot P = {}^tPSP$

Thm : de Sylvester :

[GRI] Toute matrice symétrique a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ dans son orbite : ...

Deux matrices sont dans la même orbite ssi elles ont même signature (r,s).

Cor : Il y a donc $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ orbites, dont un système de représentants est $\left\{ \begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 0 \le r \le n \\ 0 \le s \le n \end{array} \ r+s \le n \right\}$

Rq : Si $M \in S_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Stab}(M) = \{P \in GL_n(\mathbb{R}) \,/\, {}^tPMP = M\} = O(r,s)$ le groupe des isométries associé à une forme quadratique de signature (r,s).

applic : Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

c. $GL_n(\mathbb{C})$ agit sur $S_n(\mathbb{C})$ à droite :

$(M,P) \mapsto M\cdot P = {}^tPMP$.

Prop : Deux matrices symétriques sont dans la même orbite ssi elles ont même rang. (GRI)

Un système de représentants des orbites est $\left\{ \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ r \in [\![0,n]\!] \right\}$. Il y a donc $n+1$ orbites.

d. $GL_n(\mathbb{R})$ agit sur $A_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ par congruence à droite : $(M,P) \mapsto {}^tPMP$. (SER)

Prop : Si n est pair, il n'y a qu'une seule orbite dont un représentant est $\begin{pmatrix} 0 & -I_{n/2} \\ I_{n/2} & 0 \end{pmatrix}$

2. Action de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$.

$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) = \{$matrices triangulaires inférieures à coefficients diagonaux strictement positifs$\}$.

agit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par congruence $(L,M) \mapsto {}^tLML$.

Prop : L'orbite de I_n contient les matrices de $S_n^{++}(\mathbb{R})$. (SER)

Applic : décomposition de Cholesky.

Si $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors il existe une unique matrice $L \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tLL$.

Compléments :

(*) Un système de représentants est $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & * \\ & a_{ss} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 0 \le s \le n \\ a_{ij} \in \mathbb{K} \end{array} \right\}$

(resp $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ * & a_{ss} & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 0 \le s \le n \\ a_{ij} \in \mathbb{K} \end{array} \right\}$)

(**) Le système de représentants est $\left\{ \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_s & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} s \in [\![0,n]\!],\ \forall i \in [\![1,s]\!], \\ d_i \neq 0,\ d_1 | \cdots | d_s \end{array} \right\} \Big/ \mathcal{R}$ où $M \mathcal{R} N$ ssi leurs coefficients sont associés.