Leçon 107 : Représentation et caractère d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Cadre : G désignera un groupe fini de cardinal n.

I) Représentation de groupe.

1°) Premières définitions

Déf : On appelle représentation d'un groupe G, la donnée d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V et d'un morphisme de groupe $\rho : G \to GL(V)$. On la note (ρ, V) ou V.

Rk : Cette définition équivaut à la donnée d'un $\mathbb{C}$-ev, et d'une action linéaire de G sur V.

Déf : On appelle degré d'une représentation (ρ, V) la dimension du $\mathbb{C}$-ev V.

Dans la suite on ne considérera que des représentations de degré fini.

Exemples :

* G groupe d'ordre n, $\rho : G \to \mathbb{C}^*$, $g \mapsto 1$. $(\rho, \mathbb{C})$ est une représentation de degré 1.
* $G = D_n$ (groupe diédral d'ordre $2n$). $D_n \hookrightarrow O(\mathbb{C}^2) \hookrightarrow GL(\mathbb{C}^2)$. On a une représentation de degré 2.

Déf : Deux représentations (ρ, V) et (ρ', V') d'un même groupe sont dites semblables (ou isomorphes) si il existe $\tau : V \to V'$ un isomorphisme tel que : $\tau \circ \rho'(s) = \rho(s) \circ \tau$ $\forall s \in G$.

Rk : Deux représentations semblables ont même degré.

Thm (Lie-Kolchin) [DVT 1].

Soit G un groupe résoluble.
On suppose qu'il existe une représentation injective $(\rho, \mathbb{C}^n)$. En identifiant G et $\rho(G)$, on munit G de la topologie induite de $GL_n(\mathbb{C})$.
On suppose G connexe pour cette topologie, soit $i : T_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ l'injection canonique des matrices triangulaires inversibles dans $GL_n(\mathbb{C})$.
Alors ρ et i sont semblables.

Déf : (Sous-représentation)

Soit (ρ, V) une représentation de G, et W un sev stable par $\rho(s)$, $\forall s \in G$.
Alors $\rho^W : W \to GL(W)$, $s \mapsto \rho(s)$ est un morphisme, et (ρ^W, W) est une représentation appelée sous-représentation de (ρ, V).

2°) Exemples fondamentaux.

a) Représentation somme

Soient (ρ', V) et (ρ'', W) deux représentations de G.
On définit la représentation somme $(\rho, V \oplus W)$ par :
$\forall g \in G$ $\forall (v, w) \in V \times W$, $\rho(g)(v, w) := \rho'(g)(v) + \rho''(g)(w)$.

b) Représentation de permutation.

Soit G un groupe qui agit sur l'ensemble X.
On a donc un morphisme $\sigma : G \to S(X)$, $g \mapsto \sigma_g$.
On définit $V = \mathrm{Vect}(e_x, x \in X)$ et $\rho : g \mapsto (e_x \mapsto e_{\sigma_g(x)})$.
(ρ, V) est une représentation de permutation de G. Elle est de degré $\mathrm{Card}(X)$.

* En faisant agir G par translation à gauche sur lui-même on obtient la représentation régulière. Elle est de degré $\mathrm{card}(G)$.

3°) Représentation irréductible.

Déf : On dit que (ρ, V) est une représentation irréductible si elle admet exactement deux sous-représentations $\{0\}$ et V.

Ex : Toute représentation de degré 1 est irréductible.

Thm (Maschke)

Soit $W \subset V$ une sous-représentation :
Alors il existe une sous-représentation $W' \subset V$ telle que $V = W \oplus W'$.
Conséquence : Toute représentation est somme directe de représentations irréductibles.

I. Théorie des caractères

1°) Définitions et premières propriétés

Déf : Soit (ρ, V) une représentation de G. On appelle caractère de (ρ, V) l'application :
$$\chi : G \to \mathbb{C}, \quad g \mapsto \mathrm{tr}(\rho(g)).$$

Propriétés : Soit (ρ, V) une représentation de G de caractère χ.
(i) $\chi(1) = \dim(V)$
(ii) $\forall s \in G$, $\chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}$
(iii) $\forall s, t \in G$, $\chi(tst^{-1}) = \chi(s)$
(iv) Si (ρ, V) se décompose en une somme directe de deux représentations de caractère χ' et χ''. Alors $\chi = \chi' + \chi''$.
(v) Deux représentations isomorphes ont même caractère.

Déf : On appelle caractère irréductible de G tout caractère associé à une représentation irréductible.

2°) Relation d'orthogonalité.

On note $\mathbb{C}^G$ l'ensemble des fonctions de G à valeur dans $\mathbb{C}$.

Déf : On définit sur $\mathbb{C}^G$ un produit scalaire par : $\forall f, h \in \mathbb{C}^G$,
$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \overline{h(g)}.$$

Lemme (Schur)
Soient (ρ^1, V_1) et (ρ^2, V_2) deux représentations irréductibles.
Soit $f : V_1 \to V_2$ telle que $\rho^2(s) \circ f = f \circ \rho^1(s)$ $\forall s \in G$.
Alors : (i) si ρ^1 n'est pas isomorphe à ρ^2, alors $f \equiv 0$.
(ii) si $V_1 = V_2$ et $\rho^1 = \rho^2$, alors f est une homothétie.

Prop. Soient V_1 et V_2 deux représentations irréductibles d'un même groupe. Alors : $\langle \chi_{V_1}, \chi_{V_2} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } V_1 \not\simeq V_2 \\ 1 & \text{si } V_1 \simeq V_2 \end{cases}$.

Thm : Soit $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ une représentation de G de caractère χ et sa décomposition en irréductible. Soit W une représentation irréductible de G de caractère χ_W.
Alors le nombre de représentation présente dans la décomposition et isomorphe à W est $\langle \chi, \chi_W \rangle$

RM : Il est clair que ce nombre est indépendant de la décomposition.

Thm : Deux représentations de même caractère sont isomorphes.

3°) Fonction centrale et algèbre $\mathbb{C}^G$.

$(V_i)_{i=1\dots r}$ designera une famille de représentants de l'ensemble des représentations irréductibles de G, ie $V_i \not\simeq V_j$ si $i \neq j$ et pour toute représentation irréductible W, $\exists i \in \{1, \dots, r\}$ tel que $W \simeq V_i$.

Déf (produit de convolution)
On définit sur $\mathbb{C}^G$, le produit : $\forall f, h \in \mathbb{C}^G$, $\forall g \in G$,
$$f * h(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} f(t)\, h(t^{-1} g).$$

Prop : $(\mathbb{C}^G, +, *)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre.

Thm : $\mathbb{C}^G$ est isomorphe à $\bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{End}(V_i)$
csq : $n = \dim(\mathbb{C}^G) = \sum_{i=1}^{r} n_i^2$ avec $(n_i = \deg(V_i))$.

Déf (fonction centrale)
On appelle fonction centrale tout élément f de $\mathbb{C}^G$ qui vérifie : $\forall t, h \in G$, $f(tht^{-1}) = f(h)$.
On note cet ensemble $H(G)$.

Ex : Les caractères sont des éléments de $H(G)$.

RM : * Si G est abélien, alors $\mathbb{C}^G = H(G)$.
* Les fonctions centrales vérifient : $\forall \varphi \in \mathbb{C}^G, \forall f \in H(G)$, $f * \varphi = \varphi * f$

Prop : $H(G)$ est le centre de $\mathbb{C}^G$ pour le produit de convolution.

Thm : Soit $(\chi_i)_{i=1\dots r}$ les caractères associés à la famille de représentants $(V_i)_{i=1\dots r}$.
Alors $(\chi_i)_{i=1\dots r}$ est une BON de $H(G)$.

Thm : Le nombre de classe de conjugaison de G est égal au nombre de représentations irréductibles à isomophisme près.

4°) table de caractère

Déf : Soit k le nombre de classe de conjugaison de G. Sa table de caractère est le tableau de taille $k \times k$.

	K_1	...	K_k
χ_1			

← classes de conjugaison
← valeur des caractère

Exemples :

* table de S_3 :

	Id	transp	3-cycles
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

* table de S_4 :

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1	1
χ_3	3	3	0	-1	-1
χ_4	3	-1	0	1	-1
χ_5	2	0	-1	0	2

DVT 2.

II Cas d'un groupe abélien G

1°) Dual et bidual de G.

Prop : G est abélien si et seulement si toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1.

Déf : On définit le groupe dual de G par :
$\hat{G} := \{ f : G \to \mathbb{C}^* \text{ morphisme} \}$.
C'est l'ensemble des caractères irréductibles.
C'est un groupe pour la multiplication : $f.g(s) = f(s)g(s)$.

Thm : G est isomorphe à son dual $\hat{G}$.
csq : $|G| = |\hat{G}|$.

On peut encore définir le dual de $\hat{G}$, que l'on note $\hat{\hat{G}}$, et que l'on appelle bidual de G.

Thm : G est canoniquement isomorphe à son bidual par l'application $\varphi : G \to \hat{\hat{G}}$, $s \mapsto (\chi \mapsto \chi(s))$

2°) Transformée de Fourier discrète.

Dans le cas où G est abélien, on a $\mathbb{C}^G = H(G)$.
$\forall f \in \mathbb{C}^G, \exists (\alpha_i)_{i=1..n} \in \mathbb{C}^n$ tels que
$f = \sum \alpha_i \chi_i$: car (χ_i) est une BON de $\mathbb{C}^G$. Donc $\alpha_i = \langle f, \chi_i \rangle$.

Déf (Transformée de Fourier).
Pour tout $f \in \mathbb{C}^G$, on définit sa transformée de Fourier par : $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$, avec $\hat{f} : \hat{G} \to G$, $\chi \mapsto \langle f, \chi \rangle$.

Exemple : $\delta_a \in \mathbb{C}^G$ tel que $\delta_a(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g = a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
$\forall \chi \in G, \hat{\delta_a}(\chi) = \frac{1}{|G|} \overline{\chi}(a)$.

Thm : La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est un isomorphisme linéaire, d'inverse :
$\forall \varphi \in \mathbb{C}^{\hat{G}}, \forall s \in G, \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(s) = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(s^{-1}) \varphi(\chi)$.

Prop : $\forall f, h \in \mathbb{C}^G$
$\mathcal{F}(f * h) = \hat{f}.\hat{h}$.

Références :

* Serre : Représentations linéaires des groupes finis.
* Peyré : L'algèbre discrète de la transformée de Fourier
* Rauch : Les groupes finis et leur représentations
* Ramis, Warusfel, Moulin : Cours de mathématiques pures et appliquées. (20€/kg)