Exercice 1

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et soient $x, y \in E$. En considérant le trinôme en $\lambda \in \mathbb{R}$ $\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle$, démontrer que :

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\|\|y\|$$

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire discrète définie par :

$$\forall 0 \leq k \leq n,\ \mathbb{P}(X = k) = aC_n^k$$

1. Calculer a.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 3

Soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation :

$$2x + y + z = 0$$

1. Déterminier $P^\perp$.
2. Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Calculer $d(u, P)$.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{(-\infty,t]\cap[0,1]} dt$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\mathbb{P}(X = x)$.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Soit $p \in (0, 1)$ et soit $Y = 1_{\{X\leq p\}}$. Déterminer la loi de Y.

Exercice 1

Soient F, G deux s-e.v d'un espace euclidient E. Démontrer que :

$$(F \cup G)^{\perp} = (F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$$

Exercice 2

On suppose que le nombre M de mutations subies par l'ADN d'un individu (par exemple *vous*) suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ (i.e $\forall k \geq 0$, $\mathbb{P}(M = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$). Étant une mutation, il existe une probabilité p (indépendante de M) qu'elle se fixe et donc affecte les cellules filles.

1. Déterminer la loi du nombre F de mutations fixées sachant $M = k$.
2. En déduire la loi de F.
3. Calculer $\mathbb{E}(F)$ et $\mathrm{Var}(F)$.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Soit $p \in (0, 1)$ et soit $Y = 1_{\{X \leq p\}}$. Déterminer la loi de Y.

Exercice 4

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien. On appelle *application symétrique* toute application $f : E \to E$ vérifiant :

$$\forall x, y \in E,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$$

1. Prouver qu'une application symétrique est linéaire.
2. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Démontrer qu'un endomorphisme de E est symétrique si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique.

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ définie par :

$$\forall k \geq 1, \, \mathbb{P}(X = k) = \mu \frac{1}{5^k}$$

Déterminer μ.

Exercice 2

Pour deux variables aléatoires discrètes réelles X, Y, on définit :

$$\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

On admet que cette formule définit bien un produit scalaire.

1. Pour X v.a.r discrète, déterminier $\|X\|$. Que remarque-t-on ?
2. Soit X une v.a.r discrète. Caractériser $X^{\perp}$.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On rappelle (à tout hasard) que cela signifie que la loi de X est :

$$\mathbb{P}_X := \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k$$

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
2. Soit $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendante de X. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 4

Soient F, G deux s-e.v d'un espace euclidient E. Démontrer que :

$$(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$$

Indication : On pourra admettre que $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$ (on pourra aussi le démontrer, ce n'est pas excessivement difficile ...).