Question de cours

Donner la définition de la limite d'une suite convergente.

Exercice 1

Pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle *série géométrique* de paramètre x la série $\sum x^n$.

1. Démontrer que la série géométrique de paramètre x converge si et seulement si $|x| < 1$.
2. Calculer le cas échéant la somme de la série géométrique de paramètre x.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire discrète définie par :

$$\forall 0 \leq k \leq n, \, \mathbb{P}(X = k) = aC_n^k$$

1. Calculer a.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 3

Soit f une fonction continue et strictement décroissante de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

1. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, il existe un unique $c_n \in [0, 1]$ tel que $f(c_n) = c_n^n$.
2. Montrer que la suite $(c_n)_n$ est croissante. En déduire qu'elle converge.
3. Démontrer que $\lim_n c_n = 1$.

Exercice 4

Soit X une v.a.r de fonction de répartition définie par :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{4} & \text{si } x \in [0, 1) \\ \frac{x}{2} & \text{si } x \in [1, 2) \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de F.
2. Calculer $\mathbb{P}(X = \frac{1}{2})$ et $\mathbb{P}(X = 1)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}])$.

Question de cours

Donner la définition d'une probabilité sur une tribu $\mathcal{F}$.

Exercice 1

On pose $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Étudier la suite $(u_n)_n$.

Exercice 2

On suppose que le nombre M de mutations subies par l'ADN d'un individu (par exemple *vous*) suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ (i.e $\forall k \geq 0$, $\mathbb{P}(M = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$). Étant une mutation, il existe une probabilité p (indépendante de M) qu'elle se fixe et donc affecte les cellules filles.

1. Déterminer la loi du nombre F de mutations fixées sachant $M = k$.
2. En déduire la loi de F.
3. Calculer $\mathbb{E}(F)$ et $\mathrm{Var}(F)$.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Soit $p \in (0, 1)$ et soit $Y = 1_{\{X \leq p\}}$. Déterminer la loi de Y.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On rappelle (à tout hasard) que cela signifie que la loi de X est :

$$\mathbb{P}_X := \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}\delta_k$$

Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Question de cours

Donner la définition d'une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ définie par :

$$\forall k \geq 1,\, \mathbb{P}(X = k) = \mu \frac{1}{5^k}$$

Déterminer μ.

Exercice 2

On considère l'équation suivante :

$$tan(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} \tag{1}$$

1. Démontrer que cette équation admet, pour tout $n \geq 0$, une unique solution x_n sur $(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2})$.
2. Démontrer que $\frac{x_n}{n\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On rappelle (à tout hasard) que cela signifie que la loi de X est :

$$\mathbb{P}_X := \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k$$

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
2. Soit $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\, \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{(-\infty, t] \cap [0,1]} dt$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\mathbb{P}(X = x)$.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Soit $p \in (0, 1)$ et soit $Y = 1_{\{X \leq p\}}$. Déterminer la loi de Y.