Question de cours

Donner la définition d'une tribu sur un ensemble Ω.

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. On rappelle (à tout hasard) que cela signifie que la loi de X est :

$$\mathbb{P}_X := \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$$

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
2. Soit $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$. Déterminer la loi de $X+Y$.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire discrète définie par :

$$\forall 0 \leq k \leq n, \, \mathbb{P}(X=k) = aC_n^k$$

1. Calculer a.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire dans $\mathbb{Z}^*$ donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \; \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{2^{|k|+1}}$$

Déterminer la loi de la variable Y définie par $Y = X$ quand $X \geq 0$ et $Y = 1 - X$ sinon.

Exercice 4

Soit X une v.a.r de fonction de répartition définie par :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{4} & \text{si } x \in [0,1) \\ \frac{x}{2} & \text{si } x \in [1,2) \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de F.
2. Calculer $\mathbb{P}(X = \frac{1}{2})$ et $\mathbb{P}(X = 1)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}])$.

Question de cours

Donner la définition d'une probabilité sur une tribu $\mathcal{F}$.

Exercice 1

Pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle *série géométrique* de paramètre x la série $\sum x^n$.

1. Démontrer que la série géométrique de paramètre x converge si et seulement si $|x| < 1$.
2. Calculer le cas échéant la somme de la série géométrique de paramètre x.

Exercice 2

On suppose que le nombre M de mutations subies par l'ADN d'un individu (par exemple *vous*) suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ (i.e $\forall k \geq 0$, $\mathbb{P}(M = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$). Étant une mutation, il existe une probabilité p (indépendante de M) qu'elle se fixe et donc affecte les cellules filles.

1. Déterminer la loi du nombre F de mutations fixées sachant $M = k$.
2. En déduire la loi de F.
3. Calculer $\mathbb{E}(F)$ et $\mathrm{Var}(F)$.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\, \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Soit $p \in (0, 1)$ et soit $Y = 1_{\{X \leq p\}}$. Déterminer la loi de Y.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On rappelle (à tout hasard) que cela signifie que la loi de X est :

$$\mathbb{P}_X := \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}\delta_k$$

Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Question de cours

Donner la définition d'une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ définie par :

$$\forall k \geq 1,\, \mathbb{P}(X = k) = \mu \frac{1}{5^k}$$

Déterminer μ.

Exercice 2

Un jeu (télévisé, hélas) se déroule de la façon suivante : le présentateur présente au candidat trois portes. Derrière l'une de ces portes se trouve un cadeau et derrière les deux autres, une chèvre. Une fois que le candidat a choisi, le présentateur ouvre l'une des porte dissimulant une chèvre, puis lui offre la possibilité de modifier son choix. A–t–il intéret à le faire ? On suppose naturellement que le candidat est intéressé par le cadeau et non par la chèvre.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On rappelle (à tout hasard) que cela signifie que la loi de X est :

$$\mathbb{P}_X := \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k$$

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
2. Soit $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\, \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{(-\infty, t] \cap [0,1]} dt$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\mathbb{P}(X = x)$.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Soit $p \in (0, 1)$ et soit $Y = 1_{\{X \leq p\}}$. Déterminer la loi de Y.