Question de cours

Donner la définition d'une valeur propre / d'un vecteur propre d'un endomorphisme.

Exercice 1

Réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que $f^2 = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

1. Calculer $\det(f)$.
2. Trouver $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
3. Démontrer qu'il existe une base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que $f(e_1) = e_2$ et $f(e_2) = -e_1$.
4. Donner la matrice K de f dans cette base.
5. *Application.* Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_2$. Démontrer qu'il existe $P \in G\ell_2(\mathbb{R})$ telle que :
$$M = P^{-1}KP$$
6. Démontrer que le spectre de f est vide.

Exercice 3

On pose, pour $a \in \mathbb{R}$:

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer le réel a_0 tel que $A(a_0)$ admette 2 pour valeur propre, puis diagonaliser $A(a_0)$.

Exercice 4

Soient u, v deux endomorphismes diagonalisables de $\mathbb{R}^n$ tels que $u \circ v = v \circ u$. On se propose de démontrer que u et v sont *codiagonalisables*, i.e qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ *et* $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(v)$ soient diagonalisables.

1. Soit λ une valeur propre de u. Démontrer que le sous–espace propre associé à λ, noté E_λ, est stable par u.
2. Démontrer que E_λ est stable par v. Que peut–on en déduire concernant la restriction $\widehat{v}$ de v à ce sous–espace ?
3. Démontrer que $\widehat{v}$ est diagonalisable.
4. Conclure.

Question de cours

Donner la définition du polynôme caractéristique d'un endomorphisme. Expliciter le lien avec les éléments propres.

Exercice 1

On se place dans $E = \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ et considère l'application $\dfrac{d}{dx} : f \mapsto f'$.

1. Vérifier que E est bien un espace vectoriel et démontrer que $\dfrac{d}{dx} \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}\left(\dfrac{d}{dx}\right)$ et $\mathrm{Im}\left(\dfrac{d}{dx}\right)$.
3. Déterminer les éléments propres de $\dfrac{d}{dx}$.
4. Soit F l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[0,1]$ de degré inférieur ou égal à 2. Démontrer que F est un s-e.v de E de dimension 3 et que $\dfrac{d}{dx}(F) \subset F$. Expliciter la matrice de la restriction à F de $\dfrac{d}{dx}$ (dans la base canonique).

Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de f. Démontrer que la somme des deux sous–espaces propres associés est directe.

Exercice 3

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *nilpotente*, i.e telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que N^p.

1. Démontrer qu'il existe un entier $p_0 \geq 1$ tel que $N^{p_0} = 0$ et $\forall 0 \leq k < p_0,\ N^k \neq 0$.
2. Démontrer que pour tout $k \geq 1$, $\mathrm{Ker}(N^k) \subset \mathrm{Ker}(N^{k+1})$. Établir de plus que si $k < p_0$, $\mathrm{Ker}(N^k) \neq \mathrm{Ker}(N^{k+1})$ (on pourra procéder par l'absurde). Que se passe–t–il si $k \geq p_0$?
3. Démontrer que 0 est la seule valeur propre de N. En déduire, à l'aide du théorème de Cayley–Hamilton, que $p_0 \leq n$.
4. Récipoquement, démontrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet 0 comme unique valeur propre, elle est nilpotente.

Exercice 4

Réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Question de cours

Donner la définition et la caractérisation à l'aide du polynôme caractéristique d'un endomorphisme diagonalisable.

Exercice 1

On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. A est-elle diagonalisable pour $n = 1, 2, 3, 4$?

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et de base $(e_1 e_2, e_3)$ et soit $f : E \to E$ l'application linéaire définie par $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$ et $f(e_3) = e_1$.

1. Démontrer que f est un automorphisme de E. De deux façons différentes.
2. Déterminer les éléments propres de f.

Exercice 3

On pose $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On fixe une fonction $k \in E$ et on définit, pour $f \in E$, l'application :

$$Tf : x \mapsto \int_0^x k(t) f(t) dt$$

1. Vérifier que E est bien espace vectoriel, puis démontrer *soigneusement* que l'application $T : f \mapsto Tf$ est un endomorphisme de E. On rappelle que si g est une fonction continue, l'application $x \mapsto \int_0^x g(t)dt$ est l'unique primitive de g s'annulant en 0.
2. Déterminer les éléments propres de T.
3. Expliciter le résultat dans les cas $k(t) = -1$ et $k(t) = t$.

Exercice 4

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ une application non nulle telle que $f^2 = 0$.

1. Démontrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
2. Démontrer qu'il existe une base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que $f(e_1) = e_2$ et $f(e_2) = 0$.
3. Donner la matrice N de f dans cette base.
4. *Application.* Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = 0$. Démontrer qu'il existe $P \in G\ell_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$M = P^{-1} N P$$