Question de cours

Donner la définition d'une application linéaire, de son noyau et de son image. Expliciter une méthode "pratique" de construction de la matrice associée.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que :

1. $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$;
2. $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$;

Exercice 2

Calculer le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 3

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que $f^2 = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

1. Calculer $\det(f)$.
2. Trouver $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
3. Démontrer qu'il existe une base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que $f(e_1) = e_2$ et $f(e_2) = -e_1$.
4. Donner la matrice K de f dans cette base.
5. *Application.* Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_2$. Démontrer qu'il existe $P \in G\ell_2(\mathbb{R})$ telle que :
$$M = P^{-1}KP$$
6. Soit $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Peut-il exister $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$?

Exercice 4

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n, pour $n \geq 0$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} a+b & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a+b \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer M^n, pour $n \geq 0$.

Question de cours

Décrire la méthode matricielle de changement de base.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et de base $(e_1 e_2, e_3)$ et soit $f : E \to E$ l'application linéaire définie par $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$ et $f(e_3) = e_1$.

1. Démontrer que f est un automorphisme de E. De deux façons différentes.
2. Trouver toutes les droites stables par f.

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$. Démontrer que 2^{n-1} divise $\det(A)$.

Exercice 3

On se place dans $E = \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$ et considère l'application $\dfrac{d}{dx} : f \mapsto f'$.

1. Démontrer que $\dfrac{d}{dx} \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer $\operatorname{Ker}\left(\dfrac{d}{dx}\right)$ et $\operatorname{Im}\left(\dfrac{d}{dx}\right)$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in E$ vérifiant $\dfrac{d}{dx}(f) = \lambda f$.
4. Soit F l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[0,1]$ de degré inférieur ou égal à 2. Démontrer que F est un s-e.v de E de dimension 3 et que $\dfrac{d}{dx}(F) \subset F$. Expliciter la matrice de la restriction à F de $\dfrac{d}{dx}$ (dans la base canonique).

Exercice 4

Calculer le déterminant suivant (pour $a, b, c \in \mathbb{R}$) :

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

Question de cours

Caractériser à l'aide du déterminant une famille libre, liée, un isomorphisme. Pour deux endomorphismes u, v, a-t-on $\det(u+v) = \det(u) + \det(v)$? $\det(uv) = \det(u)\det(v)$?

Exercice 1

Calculer le déterminant suivant (pour $a, b, c \in \mathbb{R}$) :

$$D = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ une application non nulle telle que $f^2 = 0$.

1. Démontrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
2. Démontrer qu'il existe une base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que $f(e_1) = e_2$ et $f(e_2) = 0$.
3. Donner la matrice N de f dans cette base.
4. *Application.* Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = 0$. Démontrer qu'il existe $P \in G\ell_2(\mathbb{R})$ telle que :
$$M = P^{-1}NP$$

Exercice 3

Calculer le déterminant suivant (pour $a_1, \ldots, a_4, b_1, \ldots, b_4 \in \mathbb{R}$) :

$$D = \begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & a_1-b_3 & a_1-b_4 \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & a_2-b_3 & a_2-b_4 \\ a_3-b_1 & a_3-b_2 & a_3-b_3 & a_3-b_4 \\ a_4-b_1 & a_4-b_2 & a_4-b_3 & a_4-b_4 \end{vmatrix}$$

Exercice 4

Soient E un espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E.

1. Démontrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Démontrer que dans ce cas $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$, $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$ et $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0\}$.