Question de cours

Donner la caractérisation "pratique" d'un sous–espace vectoriel.

Exercice 1

Les ensembles suivants sont–ils des espaces vectoriels (pour des lois "évidentes") ?

1. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(\pi) = 0\}$
2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y^2 - z = 0\}$
3. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) - 4f(1) = 0\}$

Exercice 2

Soient F, G et H trois sous–espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Démontrer que :

$$(F \cap G) + (F \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$$

Que dire de la réciproque ?

Exercice 3

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour $1 \leq n \leq N$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sin(nx)$. Démontrer que la famille $(f_1, \ldots, f_N)$ est libre dans l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. *Indication : on pourra raisonner par récurrence sur N.*

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^5$ on se donne $x_1 = (1, 2, -4, 3, 1)$, $x_2 = (2, 5, -3, 4, 8)$, $x_3 = (6, 17, -7, 10, 22)$ et $x_4 = (1, 3, -3, 2, 0)$. Donner le rang de la famille (x_1, x_2, x_3, x_4).

Question de cours

Donner la définition d'une famille libre, ainsi que la caractérisation "pratique" associée.

Exercice 1

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E. Soit $y = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ une combinaison linéaire des x_i. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients λ_i pour que la famille $(x_1 - y, \ldots, x_n - y)$ soit libre.

Exercice 2

Les ensembles suivants sont–ils des espaces vectoriels (pour des lois "évidentes") ?

1. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(\pi) = \frac{3}{2}\}$
2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y - z = 0\}$
3. $\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \,|\, f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} f(0)f(\pi)\}$

Exercice 3

Démontrer que l'ensemble $\mathcal{U}$ des suites réelles convergeant vers 0 forme un espace vectoriel. Montrer ensuite que pour tout $p \geq 1$ la famille $\left(\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}, \ldots, \left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\geq 1}\right)$ est libre dans $\mathcal{U}$.

Exercice 4

Soient F et G deux sous–espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Démontrer que si $F \cup G$ est un s-ev de E alors $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Question de cours

Donner la définition d'une famille génératrice.

Exercice 1

Soient F, G et H trois sous–espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $F \cap G = F \cap H$, $F + G = F + H$ et $G \subset H$. Démontrer que $G = H$.

Exercice 2

Les ensembles suivants sont–ils des espaces vectoriels (pour des lois "évidentes") ?

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x + y - z = 1\}$
2. $\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \,|\, f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} f(2)\}$
3. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x)e^{-x} = f(2x)\}$

Exercice 3

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_\alpha(x) = |x - \alpha|$. Démontrer que si $\alpha \neq \beta$ alors la famille (f_α, f_β) est libre. Généraliser au cas d'une famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de réel deux à deux distincts.

Exercice 4

Démontrer que l'ensemble des fonctions f polynomiales sur [0,1] de degré inférieur à 2 vérifiant $f(2) = 0$ est un espace vectoriel et montrer que les fonctions $f_1 : x \mapsto x - 2$ et $f_2 : x \mapsto (x - 2)^2$ en forment une base.