Critère de Weyl

Arnaud Girand

17 juin 2012

Référence :
- [FGN09], p. 47–49

Proposition 1 (Weyl)
Soit $u \in [0,1]^{\mathbb{N}}$.
Pour $0 \leq a \leq b \leq 1$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$ *on pose :*

$$X_n(a,b) := \operatorname{card}\{k \in [n] \mid u_k \in [a,b]\}$$

On a alors équivalence entre les trois propriétés suivantes :

(i) Pour tous $0 \leq a \leq b \leq 1$ *on a :*

$$\frac{X_n(a,b)}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} b - a$$

(ii) pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *on a :*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_0^1 f(t)dt$$

(iii) pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ *on a :*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Démonstration :

$(i) \Rightarrow (ii)$ On se donne $\leq a \leq b \leq 1$. Commençons par remarquer que :

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{X_n(a,b)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1_{[a,b]}(u_k) \text{ et } \int_0^1 1_{[a,b]}(t)dt = b - a$$

De fait, la conditions (ii) est vérifiée par les fonctions indicatrices de segments inclus dans $[0,1]$ et donc, par linéarité, aux fonctions en escalier sur $[0,1]$.
Soient à présent $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$: on sait qu'on dispose alors par densité d'une application g en escalier sur $[0,1]$ telle que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. Or :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) - \int_0^1 f(t)dt\right| \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) - g(u_k)\right| \tag{1}$$

$$+ \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(u_k) - \int_0^1 g(t)dt\right| \tag{2}$$

$$+ \left|\int_0^1 g(t)dt - \int_0^1 f(t)dt\right| \tag{3}$$

Le terme(1) est aisément majoré par $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \|f-g\|_\infty = \|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$, de même que (3) l'est par $\int_0^1 \|f-g\|_\infty dt = \|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$. De plus, g est une fonction en escalier donc il existe [1] $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(u_k) - \int_0^1 g(t)dt\right| \leq \varepsilon$$

1. Prendre $\frac{1}{N}$ suffisamment proche du pas d'une subdivision de $[0,1]$ adaptée à g.

D'où une majoration de (2) par ε pour n assez grand et donc la propriété (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$ Soient $0 < \alpha < \beta < 1$. Pour $k \geq 1$ on définit deux fonctions ψ_k et ϕ_k continues sur $[0,1]$ comme suit : ψ_k (resp. ϕ_k) est nulle sur $[0,\alpha] \cup [\beta,1]$ (resp. sur $\left[0, \alpha - \frac{1}{k}\right] \cup \left[\beta + \frac{1}{k}, 1\right]$), constante égale à 1 sur $\left[\alpha + \frac{1}{k}, \beta - \frac{1}{k}\right]$ (resp. sur $[\alpha, \beta]$) et affine partout ailleurs.

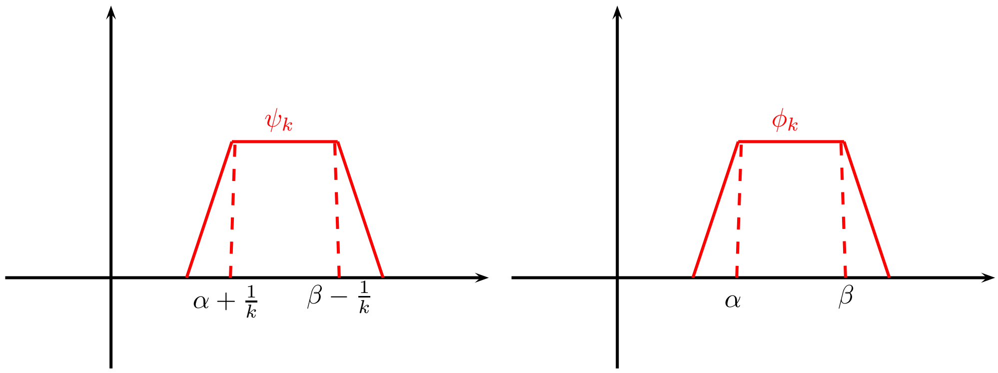


FIGURE 1 – Allure des fonctions ψ_k et ϕ_k.

Il est alors clair que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\psi_p \leq 1_{[\alpha,\beta]} \leq \phi_p$ et donc, comme $\dfrac{X_n(\alpha,\beta)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n 1_{[\alpha,\beta]}(u_k)$:

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \psi_p(u_k) \leq \frac{X_n(\alpha,\beta)}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \phi_p(u_k) \tag{4}$$

Or, par (ii), $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n \psi_p(u_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \psi_p(t)dt = \beta - \alpha - \frac{1}{p}$ et $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n \phi_p(u_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \phi_p(t)dt = \beta - \alpha + \frac{1}{p}$ donc si on fixe $\varepsilon > 0$ et p tel que $\frac{1}{p} < \varepsilon$ on a par (4) :

$$\exists N \geq 0,\ \forall n \geq N, \quad \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \psi_p(u_k) - \beta + \alpha\right| \leq \varepsilon \text{ et } \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \phi_p(u_k) - \beta + \alpha\right| \leq \varepsilon$$

D'où :

$$\forall n \geq N, \quad \left|\frac{X_n(\alpha,\beta)}{n} - \beta + \alpha\right| \leq 2\varepsilon$$

D'où le résultat (sauf au bord). On adapte ensuite ψ_k et ϕ_k aux cas où $\alpha = 0$ et/ou $\beta = 1$ et on obtient le dernier "morceau" du résultat en suivant exactement le même raisonnement.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Immédiat en remarquant que $e^{2i\pi p u_k} = \cos(2i\pi p u_k) + i\sin(2i\pi p u_k)$.

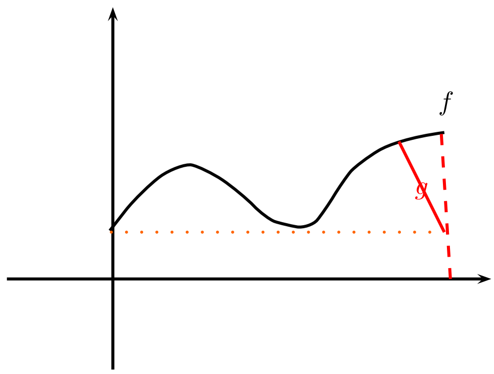
$(iii) \Rightarrow (ii)$ Par linéarité, on déduit de (iii) que (ii) est vérifiée par les polynômes trigonométriques. Or, d'après le théorème de Weierstrass (version trigonométrique), si on se donne $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ telle que $f(0) = f(1)$ il existe une suite de polynôme trigonométrique convergeant uniformément vers f. On conclut alors exactement comme en $(i) \Rightarrow (ii)$. Si $f(0) \neq f(1)$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver une fonction continue g telle que $g(0) = g(1)$ et $\int_0^1 |f(t) - g(t)|dt \leq \varepsilon$ ce qui permet à nouveau de conclure comme en $(i) \Rightarrow (ii)$.

Détails supplémentaires :

- Un dessin pour se convaincre du tout dernier résultat de densité énoncé. Il s'agit juste de contrôler l'aire entre les deux courbes, ce qui reste raisonnable.
- On peut faire un lien entre ce critère et la méthode de Monte–Carlo (point (ii)) pour le calcul approché d'intégrales.

Références

[FGN09] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X - ENS, Analyse 2 (2e édition)*. Cassini, 2009.


f
g