Théorème de Tietze

Arnaud Girand

17 juin 2012

Référence :
- [QZ95], p. 198–199

Lemme 1 ([QZ95], p. 197)
Soient E, F deux espaces de Banach.
Soit $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$.
On suppose que T est presque surjective, i.e qu'il existe $\alpha \in (0,1)$ et $C > 0$ tels que :

$$\forall y \in \overline{\mathcal{B}}_F(0,1),\ \exists x \in \overline{\mathcal{B}}_E(0,C), \quad \|y - T(x)\| \leq \alpha$$

Alors T est surjectif. Plus précisément :

$$\forall y \in \overline{\mathcal{B}}_F(0,1),\ \exists x \in \overline{\mathcal{B}}_E\left(0, \frac{C}{1-\alpha}\right), \quad y = T(x)$$

Démonstration : Soit $y \in \overline{\mathcal{B}}_F(0,1)$. On construit par récurrence sur $n \geq 1$ une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ telle que :

$$\forall n \geq 1, \qquad x_n \in \overline{\mathcal{B}}_E(0,C) \text{ et } \left\| y - \sum_{i=1}^{n} \alpha^{i-1} T(x_i) \right\| \leq \alpha^n$$

- $n = 1$. Découle de la presque surjectivité.
- Supposons la suite construite jusqu'au rang $n \geq 1$. Alors $\frac{y - \sum_{i=1}^{n} \alpha^{i-1} T(x_i)}{\alpha^n} \in \overline{\mathcal{B}}_F(0,1)$ donc il existe $x_{n+1} \in \overline{\mathcal{B}}_E(0,C)$ tel que $\left\| \frac{y - \sum_{i=1}^{n} \alpha^{i-1} T(x_i)}{\alpha^n} - T(x_{n+1}) \right\| \leq \alpha$ et donc :

$$\left\| y - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha^{i-1} T(x_i) \right\| \leq \alpha^{n+1}$$

D'où le résultat.

De plus, pour tout $n \geq$, $\|\alpha^{n-1} x_n\| \leq \alpha^{n-1} C$. Comme $0 < \alpha < 1$, la série $\sigma \alpha^{n-1} x_n$ converge alors absolument (série géométrique) donc converge car E est un espace de Banach. On peut donc poser $x := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} x_n \in E$ et alors :

$$\|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} \|x_n\| \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} = \frac{C}{1-\alpha}$$

Et, si $N \geq 1$:

$$\left\| y - T\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha^{n-1} x_n \right) \right\| \leq \alpha^N \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

Donc, par continuité de T :

$$\|y - T(x)\| = \lim_{N \to \infty} \left\| y - T\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha^{n-1} x_n \right) \right\| = 0$$

Proposition 1 (Tietze)
Soit (X,d) un espace métrique.
Soit $Y \subset X$ un fermé.
Soit $g_0 \in \mathcal{C}^0(Y, \mathbb{R})$.
Alors g_0 admet un prolongement continu f_0 à X.

DÉMONSTRATION : On définit un opérateur $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{C}_b^0(X,\mathbb{R}), \mathcal{C}_b^0(y,\mathbb{R}))$ comme suit :

$$T : f \mapsto f_{|_Y}$$

Soit $g \in \mathcal{C}_b^0(Y,\mathbb{R})$ telle que $\|g\|_\infty \leq 1$ (i.e g comprise entre -1 et 1). On pose :

$$Y^+ := \left\{ x \in Y \,\middle|\, \frac{1}{3} \leq g(x) \leq 1 \right\} \text{ et } Y^- := \left\{ x \in Y \,\middle|\, -1 \leq g(x) \leq -\frac{1}{3} \right\}$$

On définit alors une application $f \in \mathcal{C}_b^0(X,\mathbb{R})$ de la façon suivante :

$$f : x \mapsto \frac{1}{3} \frac{d(x,Y^-) - d(x,Y^+)}{d(x,Y^-) + d(x,Y^+)}$$

Il est clair $(d(x,Y^-) - d(x,Y^+) \leq d(x,Y^-) + d(x,Y^+))$ que $\|f\|_\infty \leq 1$. On distingue alors, pour $x \in Y$, 3 cas.

- *Cas 1 :* $x \in Y^+$. Alors $g(x) - f(x) = g(x) - \frac{1}{3} \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$.
- *Cas 2 :* $x \in Y^-$. Alors $g(x) - f(x) = g(x) + \frac{1}{3} \in \left[-\frac{2}{3}, 0\right]$.
- *Cas 3 :* $\neg$*(cas 1* $\vee$ *cas 2).* Alors $|g(x) - f(x)| \leq |g(x)| + |f(x)| \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

In fine, on a bien $\|T(f) - g\|_\infty \leq \frac{2}{3}$: T est presque surjectif avec $\alpha = \frac{1}{3}$ et $C = \frac{2}{3}$.

D'après le lemme 1, pour tout g dans la boule unité fermée de $(\mathcal{C}_b^0(Y,\mathbb{R}), \|.\|_\infty$ il existe $f \in \mathcal{C}_b^0(X,\mathbb{R})$ de norme inférieure ou égale à $\frac{2/3}{1-1/3} = 1$ telle que $g = f_{|_Y}$, i.e g admet un prolongement continu à X de norme inférieure ou égale à 1.

Soit à présent g dans la boule unité *ouverte* de $(\mathcal{C}_b^0(Y,\mathbb{R}), \|.\|_\infty$. On vient de montrer que g admet un prolongement h dans la boule unité de $(\mathcal{C}_b^0(X,\mathbb{R}), \|.\|_\infty$ et on souhaite montrer qu'il existe h dans la boule unité *ouverte* de $(\mathcal{C}_b^0(X,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ tel que $g = f_{|_Y}$.

- Si $\|h\|_\infty < 1$, $f := h$ convient.
- Sinon, on pose $Z := \{x \in X \,|\, |h(x)| = 1\}$. Par hypothèse, $\overline{Y \cap Z} = Y \cap Z = \emptyset$ donc on peut poser :

$$\begin{aligned} u : X &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \frac{d(x,z)}{d(x,y) + d(x,z)} \end{aligned}$$

  Posons $f := u \times h$. Alors :
  * si $x \in Y$, $f(x) = 1 \times g(x) = g(x)$;
  * sinon, $|u(x)| \leq 1$ donc $|f(x)| \leq 1$ et si $|h(x)| = 1$ alors $u(x) = 0$ donc $f(x)0$.
  De fait, $\|f\|_\infty\| < 1$ et $g = f_{|_Y}$.

Enfin, soit ϕ un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $(-1,1)$ (par exemple $u \mapsto \frac{2}{\pi}\arctan(u)$). On vient de montrer que l'on peut prolonger $g := \phi \circ g_0$ en $f : X \mapsto (-1,1)$: de fait, $f_0 := \phi^{-1} \circ f$ convient.

Références

[QZ95] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Éléments d'analyse pour l'agrégation.* Masson, 1995.