Réduction des endomorphismes auto-adjoints

Arnaud Girand

10 juillet 2012

Référence :
- [Gou94], p. 240–241

Tout ce qui suit est valable dans un espace hermitien, au prix de quelques substitutions dont nous laissons l'entreprise au lecteur.

Proposition 1
Soit E un espace euclidien.
Soit $f \in \mathcal{S}(E)$.
Alors :
- *(i)* $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}$ *;*
- *(ii) E admet une base orthonormée formée de vecteurs propres de E.*

Démonstration : On procède[1] par récurrence sur la dimension de E. Plus précisément on souhaite montrer pour tout $n \geq 0$ la propositions suivante :

$$\mathcal{P}(n) \qquad \text{pour tout espace euclidien } E \text{ de dimension } n \text{ et tout } f \in \mathcal{S}(E) \text{ on a } (i) \text{ et } (ii)$$

- *n=0.* Trivial : une b.o.n de $\{0\}$ est () qui est formée de vecteurs propres de l'endomorphisme nul zéro–dimensionnel.
- Supposons $\mathcal{P}(n)$ pour $n \geq 0$. Soit E un espace euclidien de dimension $n+1$ et $f \in \mathcal{S}(E)$. On peut alors définir une forme bilinéaire symétrique comme suit :

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, f(y) \rangle \end{aligned}$$

Notons ϕ la forme quadratique associée à φ. Alors par compacité de la sphère $\mathbb{S}$ de centre 0 et de rayon 1 de E et continuité (par dimension finie) de ϕ, il existe $x_0 \in \mathbb{S}$ tel que $\phi(x_0) = \lambda := \sup_{\mathbb{S}} \phi$.

Posons $g := \lambda \mathrm{id}_E - f$ et $\varphi_1(x, y) \mapsto \langle x, g(y) \rangle$. Alors φ_1 définit une forme bilinéaires symétrique positive (par définition de λ) et $\varphi_1(x_0, x_0) = 0$. Comme $x_0 \neq 0$, φ_1 n'est pas définie donc possède un noyau[2], i.e il existe $x \neq 0$ tel que pour tout $y \in E$ $\varphi_1(x, y) = 0$, ce qui est équivalente à $(x \neq 0) \wedge (x \in \mathrm{Im}(g)^{\perp})$.

De fait, $\mathrm{Im}(g) \neq E$, i.e g n'est pas surjectif. Par dimension finie, il n'est pas non plus injectif et donc il existe un vecteur unitaire e_1 tel que $g(e_1) = 0$ i.e $f(e_1) = \lambda e_1$. De fait $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ et comme ϕ est une forme quadratique $\lambda \in \mathbb{R}$.

Posons à présent $H := \langle e_1 \rangle^{\perp}$. Alors comme $\langle e_1 \rangle$ est stable par f, H est stable par $f^* = f$ et donc f induit sur H un endomorphisme $f_H \in \mathcal{L}(H)$. Par hypothèse de récurrence, comme $\dim(H) \leq n$ et que f_H est symétrique, il existe une b.o.n $(e_2, \ldots, e_n)$ de H formée de vecteurs propres de f_H, donc de f, et $\mathrm{Sp}(f_H) \subset \mathbb{R}$. De fait $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda\} \cup \mathrm{Sp}(f_H) \subset \mathbb{R}$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ est une b.o.n de E constituée de vecteurs propres de f, d'où le résultat.

Les deux corollaires qui suivent ne sont que reformulations du résultat.

Corollaire 1.1 (Version matricielle)
Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$.
Alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale tel que $M = {}^tPDP$.

1. Hélas.
2. On dit aussi "est dégénérée", mais vous et moi sommes au dessus de ce genre d'attaques *ad hominem*, n'est-ce pas ?

Corollaire 1.2
Soit E un espace euclidien.
Soit ϕ, ψ deux formes quadratiques sur E telles que ψ soit définie positive.
Alors il existe une base de E ψ–orthonormée dans laquelle la matrice de ϕ est diagonale.

Corollaire 1.3 (Pseudo-réduction simultanée)
Soient $M, N \in S_n(\mathbb{R})$ telles que M soit définie positive.
Alors il existe $C \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tCNC$ soit diagonale et que ${}^tCMC = I_n$.

DÉMONSTRATION : On applique le corollaire 1.2 à $E := \mathbb{R}^n$, $\phi : (X,Y) \mapsto {}^tXNY$ et $\psi : (X,Y) \mapsto {}^tXMY$ puis on traduit matriciellement.

On peut aussi citer le corollaire suivant :

Corollaire 1.4 (Racine carrée d'un endomorphisme auto–adjoint positif, [FGN10] p. 107)
Soit E un espace euclidien.
Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$.
Alors il existe un unique $h \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $u = h^2$. De plus, h est un polynôme en u.

DÉMONSTRATION :
- *Existence.* Soit $(e_i)_{i\in[n]}$ une base de diagonalisation de u, chaque e_i étant associé à une valeur propre λ_i de u. Les λ_i étant réels positifs, on peut définir $h : e_i \mapsto \sqrt{\lambda_i} e_i$, qui convient.
- *Unicité.* Soit $k \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $k^2 = u$ et soit λ une valeur propre de u, de sous–espace propre associé E_λ. Alors k commute avec u donc induit un endomorphisme $\bar{k} \in \mathcal{S}^+(E_\lambda)$ tel que $\bar{k}^2 = \lambda \mathrm{id}_{E_\lambda}$. On a alors que $\bar{k}$ est diagonalisable de spectre réduit à $\{\sqrt{\lambda}\}$ (car ses valeurs propres doivent être positives) donc $\bar{k} = \sqrt{\lambda}\mathrm{id}_{E_\lambda}$. Ainsi, si $(e_i)_{i\in[n]}$ est une base de diagonalisation de u, on a nécessairement $k(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i = h(e_i)$ pour tout $i \in [n]$. Ainsi, $k = h$.
- Pour voir que h est un polynôme en u, il suffit de remarquer que par interpolation (de Lagrange par exemple) il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $P(\lambda) = \sqrt{\lambda}$. $P(u)$ coïncide alors avec h sur $(e_i)_{i\in[n]}$ donc sur E tout entier.

Références

[FGN10] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X - ENS, Algèbre 3.* Cassini, 2010.

[Gou94] Xavier Gourdon. *Algèbre.* Ellipses, 1994.