

Théorème de Fischer–Riesz

Arnaud GIRAND

17 juin 2012

Référence :

– [Bre05], p. 57–58

Proposition 1 (Fischer–Riesz)

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d , $d \geq 1$.

Soit $p \in [1, \infty]$.

Alors :

- (i) $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach ;
- (ii) de toute suite convergente dans $L^p(\Omega)$ on peut extraire une suite convergente presque partout sur Ω .

DÉMONSTRATION :

– Cas $p = \infty$. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $L^\infty(\Omega)$. Alors $\forall k \geq 1, \exists N_k \geq 0$ tel que :

$$\forall n \geq N_k, \forall q \geq 0, \|f_{n+q} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}$$

De fait il existe un ensemble négligeable $E_k \subset \Omega$ tel que :

$$\forall n \geq N_k, \forall q \geq 0, \forall x \notin E_k, |f_{n+q}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad (1)$$

Ainsi, pour tout x n'appartenant pas à l'ensemble négligeable $E := \cup_k E_k$, la suite $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans \mathbb{R} donc converge vers un réel $f(x)$. De plus, en faisant tendre q vers l'infini dans (1) on obtient :

$$\forall x \notin E, \forall n \geq N_k, |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}$$

De fait, la fonction f ainsi définie¹ est dans L^∞ (ce qui prouve le point (ii) étant donné que toute suite convergente est de Cauchy) et $\forall n \geq N_k, \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{k}$, ce qui signifie que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^\infty} f$, ce qui prouve le point (i).

– Cas $p < \infty$. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans L^p . Comme toute suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence converge, il nous suffit d'extraire de cette dernière une suite convergente pour prouver le point (i). Commençons par remarquer que :

$$\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ strictement croissante telle que } \forall n \geq 1, \|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_p \leq \frac{1}{2^n} \quad (2)$$

On pose ensuite, pour $n \geq 0$:

$$g_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n |f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x)|$$

Alors $g_n \in L^p(\Omega)$ (comme somme de fonctions L^p) et par inégalité triangulaire :

$$\|g_n\|_p \leq \sum_{k=1}^n \|f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}\|_p \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

1. Comme on travaille dans un espace L on peut (doit!) se contenter de la définir presque partout.

De fait la suite de fonctions $(g_n)_n$ est croissante et bornée en norme L^p donc par théorème de Beppo–Levi, il existe $g \in L^p(\Omega)$ tel que $g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g$ presque partout. Ainsi, pour presque tout $x \in \Omega$ on a :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2, \forall q \geq 0, |f_{\varphi(n+q)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)| &= \left| f_{\varphi(n+q)}(x) - \sum_{k=1}^{q-1} f_{\varphi(n+k)}(x) + \sum_{k=1}^{q-1} f_{\varphi(n+k)}(x) - f_{\varphi(n)}(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^q |f_{\varphi(n+k)}(x) - f_{\varphi(n+k-1)}(x)| \\ &= g_{n+q}(x) - g_{n-1}(x) \\ &\leq g(x) - g_{n-1}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

Ainsi (la majoration étant indépendante de q) la suite $(f_{\varphi(n)})_x$ est de Cauchy dans \mathbb{R} donc converge vers un réel $f(x)$. Comme pour presque tout $x \in \Omega$ on a $|f(x) - f_{\varphi(n)}(x)| \leq g(x)$ ($n \geq 2$) la fonction f ainsi définie est bien dans L^p , ce qui au passage prouve le point (ii) car toute suite convergente est de Cauchy.

En fine les $f_{\varphi(n)}$ sont dans L^p , convergent presque partout vers $f \in L^p$ et subissent l'intenable domination $|f_{\varphi(n)}(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ (avec $|f| + |g| \in L^p$) presque partout. Vous l'aurez deviné, notre salut va provenir du théorème de convergence dominée qui nous permet de conclure que $f_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} f$.

La suite de Cauchy $(f_n)_n$ admet donc une valeur d'adhérence f dans $L^p(\Omega)$ donc converge vers cette dernière, ce qui prouve le point (i) et achève le théorème (tout du moins sa preuve).

Détails supplémentaires :

- On peut ajouter au point (ii) que la sous-suite en question est dominée par $h \in L^p$. En effet, il suffit de poser $h = |f| + |g|$ (dans le cas $p < \infty$) ou $h = 1 + |f|$ (dans le cas $p = \infty$).
- *Démonstration du point (2)*. Construisons φ par récurrence. Comme $(f_n)_n$ est de Cauchy, il existe $N_1 \geq 0$ tel que :

$$\forall n \geq N_1, \forall q \geq 0, \|f_{n+q} - f_n\|_p \leq \frac{1}{2}$$

On pose $\varphi(1) := N_1$.

Supposons à présent φ construite jusqu'au rang $n \geq 1$. Alors, toujours comme $(f_n)_n$ est de Cauchy, il existe N_{n+1} tel que :

$$\forall n \geq N_{n+1}, \forall q \geq 0, \|f_{n+q} - f_n\|_p \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

Quitte à aller un peu plus loin que prévu, on peut supposer $N_{n+1} > \varphi(n)$ et il nous suffit alors de poser $\varphi(n+1) := N_{n+1}$ pour conclure.

Références

[Bre05] Haim Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Dunod, 2005.