Action de $PSL_2(\mathbb{R})$ sur le demi–plan de Poincaré

Arnaud Girand

5 juillet 2012

Référence :
- [Mé06], p. 568–570

Prérequis :
- espace $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$;
- homographies, birapport.

On considère le demi–plan de Poincaré, défini par $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \Im(z) > 0\} \cup \{\infty\} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. On appelle droite hyperbolique de $\mathcal{H}$ les demi–cercles (épointés) de $\mathcal{H}$ dont le centre est réel, ainsi que les demi–droites (toujours épointées) verticales (i.e parallèles à $i\mathbb{R}_+^*$) et on note D_h l'ensemble des telles droites.

Lemme 1
Soient z, w deux points distincts de $\mathcal{H}$.
Alors il existe une unique droite hyperbolique passant par z et w.

Démonstration :
- *Existence.* Soit $\mathcal{C}$ le cercle ou droite de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ passant par w, z et $\bar{z}$. On remarque alors que $\overline{[z, w, \bar{z}, \bar{w}]} = [z, w, \bar{z}, \bar{w}]$ donc $[z, w, \bar{z}, \bar{w}] \in \mathbb{R}$. De fait, les points $z, w, \bar{z}$ et $\bar{w}$ sont cocycliques ou alignés (nécessairement verticalement,h vu la présence des conjugués), i.e $\bar{w} \in \mathcal{C}$. De fait, comme le conjugué $\bar{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ contient les quatre points $z, w, \bar{z}, \bar{w} \in \mathcal{C}$ on a $\mathcal{C} = \bar{\mathcal{C}}$.
  De fait, $\mathcal{C}$ est une droite verticale ou un cercle de centre réelle, ce qui signifie que $\mathcal{C} \cap \mathcal{H} \in D_h$, d'où l'existence d'une droite hyperbolique passant par z et w.
- *Unicité.* C'est immédiat : soit z et w sont alignés verticalement, auquel cas on a unicité de la droite verticale passant par ces deux points et absence de demi–cercle de centre réel faisant de même, soit ils ne le sont pas et auquel cas il existe un unique demi cercle de centre réel passant par z et w (car ce cercle doit nécessairement passer par —par exemple— $\overline{z}$).

Proposition 1
On a les deux propriétés suivantes :
(i) $PSL_2(\mathbb{R})$ *agit transitivement sur* $\mathcal{H}$ *;*
(ii) $PSL_2(\mathbb{R})$ *agit transitivement sur* D_h*.*

Démonstration : Remarquons que deux matrices M et N donnent la même homographie si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda N$; ainsi $PSL_2(\mathbb{R}) = \{h \in PGL_2(\mathbb{R}) \,|\, \det(h) > 0\}$: seul le signe du déterminant d'une homographie est bien défini.

(i) Soit $z \in \mathcal{H}$ et $h : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \in PSL_2(\mathbb{R})$. Alors, si on pose $z = x + iy$ on a :

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{ax + b + iay}{cx + d + icy} \\ &= \frac{(ax + b + iay)(cx + d - icy)}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \\ &= \frac{acx^2 + ad - iacyx + bcx + bd - ibcy + iacyx + iady + 1acy^2}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \end{aligned}$$

De fait, $\Im(h(z))$ est du signe de $-bcy + ady = (ad - bc)\Im(y) > 0$ car $ad - bc > 0$. Ainsi, par stabilité, $PSL_2(\mathbb{R})$ agit sur $\mathcal{H}$. Enfin, $PSL_2(\mathbb{R})$ contient les translations et homothéties de rapport positif, d'où la transitivité (faire un dessin, sans oublier que l'on ne part jamais vraiment de l'axe réel donc que les homothéties positives font remonter "en diagonale").

(*ii*) Comme les homographies conservent les cercles ou droites, $PGL_2(\mathbb{R})$ agit naturellement sur l'ensemble des cercles ou droites de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. De plus, les homographies positives conservent $\mathcal{H}$ (cf. supra), donc on a bien une action de $PSL_2(\mathbb{R})$ sur D_h. Soit $z \in \mathcal{H}$ et soit $D \in D_h$ passant par z. D'après le point (*i*), il existe $g \in PSL_2(\mathbb{R})$ tel que $g(z) = i$: $g(D)$ est alors une droite hyperbolique passant par i.

Soit D_i une droite hyperbolique passant par i telle que $D_i \neq i\mathbb{R}_+^*$: c'est alors un demi–cercle coupant l'axe réel en deux points ; considérons l'un de ces points, soit t. Il existe alors un unique réel $\theta \in (-\pi, \pi)$ tel que $\tan(\theta) = t$. On note alors $h_\theta \in PSL_2(\mathbb{R})$ l'homographie associée à la rotation $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ et on remarque que :

$$\begin{aligned} h_\theta(i) &= \frac{i\cos(\theta) - \sin(\theta)}{i\sin(\theta) + \cos(\theta)} \\ &= e^{-i\theta}(i\cos(\theta) - \sin(\theta)) \\ &= e^{-i\theta} i(\cos(\theta) + \sin(\theta)) \\ &= i \end{aligned}$$

Ainsi $h_\theta \in \mathrm{Stab}_{PSL_2(\mathbb{R})}(i)$. De plus :

$$\begin{aligned} h_\theta(t) &= \frac{t\cos(\theta) - \sin(\theta)}{t\sin(\theta) + \cos(\theta)} \\ &= \frac{\tan(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)}{t\sin(\theta) + \cos(\theta)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

In fine, si on note D_i' le cercle ou droite correspondant à D_i dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $h_\theta(D_i')$ passe par i et 0. Comme $h_\theta(D_i)$ est une droite hyperbolique, on a nécessairement $h_\theta(D_i') = i\mathbb{R}$ et donc $h_\theta(D_i) = i\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, quitte à remplacer g par une composée de la forme $h_\theta \circ g$, avec θ bien choisi, on a $g(D) = i\mathbb{R}_+^*$: l'action considérée est bien transitive.

Détails supplémentaires :

– Soient quatre points $a, b, c, d \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$; on suppose $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$. Notons h l'homographie définissant ce birapport, i.e telle que $h(a) = 0, h(b) = 1, h(c) = \infty$. Alors $h(a), h(b), h(c)$ et $h(d) = [a, b, c, d]$ sont alignés et comme l'homographie h^{-1} conserve les cercles ou droites on a bien que a, b, c et d sont alignés ou cocycliques.

Références

[Mé06] Jean-Yves Mérindol. *Nombres et algèbre.* EDP Sciences, 2006.