Partitions d'un entier en parts fixés

Arnaud Girand

20 août 2013

Référence :
- [FGN09], p. 194–196

Proposition 1
Soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux dans leur ensemble.
Pour $n \geq 1$ on pose (avec la convention $u_0 = 0$) :

$$u_n := \operatorname{card}\left(\left\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \,\middle|\, \sum_{i=1}^k a_i x_i = n\right\}\right)$$

Alors on a l'équivalent suivant :

$$u_n \sim_{n\to\infty} \frac{1}{a_1 \dots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

Démonstration : Pour tout $i \in [k]$, la série entière $\sum_{(x)} z^{x a_i}$ a pour rayon de convergence 1 (le lecteur avisé vérifiera aisément que $|z^{a_i}| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$ et pour tout $n \geq 0$ le coefficient en z^n dans le produit de Cauchy de ces dernières séries est :

$$\sum_{\underline{x} \in \mathbb{N}^k,\, \sum a_i x_i = n} 1 = u_n$$

De fait, si $|z| < 1$ on peut définir :

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = \prod_{i=1}^k \left(\sum_{x=0}^{\infty} z^{x a_i}\right) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - z^{a_i}}$$

f est alors une fraction rationnelle[1] donc les pôles sont les racines $a_1, \dots, a_{k-1}$ et a_k–ièmes de l'unité. 1 est un pôle de multiplicité k et tous les autres sont de multiplicité au plus $k-1$; en effet si $\omega \in \mathbb{C}$ vérifie que $\forall i \in [k]$, $\omega^{a_i} = 1$ alors, comme les a_i sont premiers entre eux, le théorème de Bézout nous affirme l'existence de $\underline{u} \in \mathbb{N}^k$ tel que $\sum_i u_i a_i = 1$ et donc :

$$\omega = \omega^{\sum_i u_i a_i} = \prod_{i=1}^k (\omega^{a_i})^{u_i} = 1$$

Notons $P := \{\omega_1, \dots, \omega_p\}$ l'ensemble des pôles de f, avec $\omega_1 = 1$. Alors, par décomposition en éléments simples, il existe une famille de nombres complexes $(c_{i,j})_{1 \leq i \leq p,\, 1 \leq j \leq k-1}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que si $|z| < 1$ on ait :

$$f(z) = \frac{\alpha}{(1-z)^k} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k-1} \frac{c_{i,j}}{(\omega_i - z)^j}$$

Si $\omega \in P$ et $j \in \mathbb{N}$ alors la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{(\omega - z)^j}$ est développable en série entière avec un rayon de convergence 1 et on peut obtenir les coefficients dudit développement en dérivant terme à terme le développement en série entière de $z \mapsto \dfrac{1}{\omega - z}$; or si $|z| < 1$:

$$\frac{1}{\omega - z} = \frac{1}{\omega} \frac{1}{1 - \frac{z}{\omega}}$$

1. Ainsi que la série génératrice de $(u_n)_n$.

Et donc, pour $j \leq k-1$:

$$\frac{(j-1)!}{(\omega - z)^j} = \sum_{n=j-1}^{\infty} \frac{n!}{(n-j+1)!} \frac{z^{n-j+1}}{\omega^{n+1}}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{(\omega - z)^j} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+j}^{n} \frac{z^n}{\omega^{n+j}}$$

On en déduit que :

$$\forall n \geq 1,\, u_n = f(0) = \alpha \underbrace{C_{n+k-1}^{n}}_{\sim \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}} + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{k-1} c_{i,j} \underbrace{C_{n+j}^{n} \frac{1}{\omega^{n+j}}}_{=o(n^{k-1})}$$

Ainsi :

$$u_n \sim_{n\to\infty} \alpha \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

Il ne nous reste alors plus qu'à calculer la constante α. On utilise la méthode usuelle de calcul de la décomposition en éléments simples, i.e on écrit d'abord :

$$(1-z)^k f(z) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1-z}{1-z^{a_i}} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1+z+\ldots+z^{a_i-1}}$$

Ensuite on fait "$z=1$" et on trouve :

$$\alpha = \frac{1}{a_1 \ldots a_k}$$

Et voila !

Références

[FGN09] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X - ENS, Analyse 2 (2e édition)*. Cassini, 2009.