# Méthode de Newton

Arnaud Girand

17 juin 2012

Référence :
- [Rou09], p. 152–155

Prérequis :
- formule de Taylor–Lagrange.

Soit $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ ($c < d$) telle que :
- $f(c) < 0 < f(d)$ ;
- $\forall x \in [c, d],\ f'(x) > 0$

$f$ est continue, strictement croissante et $0 \in f((c, d))$ donc il existe un unique point $a \in (c, d)$ tel que $f(a) = 0$. On cherche à approcher $a$ ; pour ce faire, on définit la fonction suivante :

$$\begin{aligned} F : [c,d] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

On fixe ensuite $x_0 \in [c, d]$ et on pose, pour $n \geq 0$, $x_{n+1} := F(x_n)$. On a alors le résultat suivant :

**Proposition 1**
*Il existe $\alpha > 0$ tel que si $x_0 \in [a - \alpha, a + \alpha]$, la suite $(x_n)_n$ converge de façon quadratique vers $a$ ; i.e $(x_n)_n$ converge vers $a$ et il existe $A > 0$ tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_{n+1} - a| \leq C|x_n - a|^2$$

Démonstration : Commençons par remarquer que :

$$F(a) = a \text{ et } F'(a) = 1 - \frac{f'(a)^2 - f(a)f''(a)}{f'(a)^2} = 1 - 1 = 0$$

Soit $x \in [c, d]$. On a alors :

$$\begin{aligned} F(x) - a &= (x - a) - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)} \text{ car } f(a) = 0 \\ &= \frac{f(a) - f(x) - (a - x)f'(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Taylor–Lagrange à l'ordre 2 à $f$ entre $x$ et $a$ (ou $a$ et $x$) on obtient l'existence d'un point $z_x \in (x, a)$ ou $(a, x)$ tel que :

$$f(a) - f(x) - (a - x)f'(x) = \frac{1}{2}f''(z_x)(a - x)^2$$

D'où :

$$F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z_x)}{f'(x)}(x - a)^2 \tag{1}$$

Posons $C := \dfrac{\max_{[c,d]} |f''|}{2 \min_{[c,d]} |f'|}$. Alors on a :

$$\forall x \in [c, d], \qquad |F(x) - a| \leq C|x - a|^2$$

Soit à présent $\alpha$ tel que $C\alpha < 1$ et $I := [a-\alpha, a+\alpha] \subset [c,d]$. Alors, si $x \in I$, $|F(x)-a| \leq C\alpha^2 < \alpha$ et donc $I$ est stable par $f$. Ainsi, si $x_0 \in I$, tous les $x_n$ seront dans $I$ et :

$$\forall n \geq 0, \quad |x_{n+1} - a| = |F(x_n) - a| \leq C|x_n - a|^2$$

Et donc par récurrence :

$$\forall n \geq 0, \quad C|x_n - a|^2 \leq (C|x_0 - a|)^{2^n} \leq (C\alpha)^{2^n}$$

D'où le résultat comme $0 < C\alpha < 1$.

**Proposition 2**
*On suppose à présent que $f'' > 0$.*
*Alors :*
- *$I := [a,d]$ est stable par $F$ ;*
- *si $x_0 \in I$, la suite $(x_n)_n$ est strictement décroissante ou constante et :*

$$\begin{cases} \forall n \geq 0, \quad 0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2 \\ x_{n+1} - a \sim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2}\dfrac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2 \ \text{si } x_0 > a \end{cases}$$

Démonstration : Comme $f'' > 0$, $f$ est strictement convexe sur $(c,d)$. Si $x \in I$, $f'(x) > 0$ et $f(x) \geq 0$ donc :

$$F(x) \leq x \text{ avec inégalité stricte si } x > a \tag{2}$$

De plus, d'après ( 1 ) et comme la courbe de $f$ est au dessus de ses tangentes, il existe $z_x \in [a,x]$ tel que :

$$F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z_x)}{f'(x)}(x-a)^2 \geq 0 \text{ avec inégalité stricte si } x > a \tag{3}$$

Combinant ( 2 ) et ( 3 ) on obtient que $I$ est stable par $F$ et que si $x_0 \in (a,d]$, pour tout $n \geq 0$, $a < x_n \leq d$ et $(x_n)_n$ est strictement décroissante ; si $x_0 = a$, cette dernière suite est constante.

Dans tous les cas, $(x_n)_n$ admet une limite $\ell \in I$ (car décroissante et minorée) et par continuité $F(\ell) = \ell$ et donc $f(\ell) = 0$ d'où $\ell = a$. Comme précédemment [1] on montre que :

$$\forall n \geq 0, \quad 0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$$

D'où la convergence quadratique de $(x_n)_n$ vers $a$.

Enfin, si $x_0 \in (a,d]$, les $x_n$ sont tous dans $(a,d]$ et si note $z_n$ les "$z_{x_n}$" provenant de la formule de Taylor–Lagrange on a :

$$\frac{x_{n+1}-a}{(x_n-a)^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(z_n)}{f'(z_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f''(a)}{f'(a)} \text{ car } a < z_n < x_n \text{ donc } z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

D'où le résultat.

**Détails supplémentaires :**
- Rappelons la mirifique *formule de Taylor–Lagrange* :

  **Proposition 3 (Formule de Taylor–Lagrange)**
  *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$.*
  *Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$.*
  *Soit $a \in I$.*
  *Alors pour tout $x \in I$ il existe $z$ strictement compris entra $a$ et $x$ (ou $x$ et $a$) tel que :*

  $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(z)}{k!}(x-a)^{n+1}$$

# Références


[Rou09] François Rouvière. *Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation (3e édition).* Cassini, 2009.


1. La minoration provient du fait que $x_n \in I$.