Lemme de Morse

Arnaud Girand

17 juin 2012

Référence :
- [Rou09], p. 354–355

Prérequis :
- loi d'inertie de Sylvester ;

Lemme 1
Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$.
Alors il existe $V \in \mathcal{V}_{S_n(\mathbb{R})}(A_0)$ *et* $\phi \in \mathcal{C}^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ *tels que :*

$$\forall A \in V, \qquad A = {}^t\phi(A) A_0 \phi(A)$$

Démonstration : On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\to S_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto {}^tM A_0 M \end{aligned}$$

φ est de classe $\mathcal{C}^1$ (car polynomiale [1]) et si $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a (en munissant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme subordonnée $\|.\|$) :

$$\begin{aligned} \varphi(I_n + H) - \varphi(I_n) &= {}^tH A_0 + A_0 H + {}^tH A_0 H \\ &= {}^t(A_0 H) + A_0 H + \|H\| \varepsilon(H) \text{ où } \varepsilon(H) \xrightarrow[H \to 0]{} 0 \end{aligned}$$

De fait, on a $d\varphi(I_n)(H) = {}^t(A_0 H) + A_0 H$. Cette applications est clairement surjective car $\forall A \in S_n(\mathbb{R})$, $A = d\varphi(I_n)\left(\frac{1}{2} A_0^{-1} A\right)$ et $\ker(d\varphi(I_n)) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0 H \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\}$. Or $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ donc si on pose $F := \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0 H \in S_n(\mathbb{R})\}$ on a :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \ker(d\varphi(I_n))$$

Si on note $\psi : F \to S_n(\mathbb{R})$ la restriction de φ à F on a $\ker(d\psi(I_n)) = \ker(d\varphi(I_n)) \cap F = \{0\}$ donc $d\psi(I_n)$ est bijective. Par théorème d'inversion locale on a alors l'existence d'un ouvert $\mathcal{U} \in \mathcal{V}_F(I_n)$ (que l'on peut, quitte à les intersecter, supposer inclus dans l'ouvert $GL_n(\mathbb{R})$) tel que ψ réalise un $\mathcal{C}^1$–difféomorphisme entre $\mathcal{U}$ et $V := \psi(\mathcal{U})$. De fait, V est un voisinage (ouvert) de $A_0 = \psi(I_n)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et :

$$\forall A \in V, \qquad A = {}^t\psi^{-1}(A) A_0 \psi^{-1}(A)$$

D'où le résultat en posant $\phi := \psi^{-1}$.

Proposition 1 (Morse)
Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert contenant* 0.
Soit $f \in \mathcal{C}^3(\mathcal{U}, \mathbb{R})$.
On suppose que :
- $df(0) = 0$ *;*
- $d^2 f(0)$ *est non dégénérée de signature* $(p, n-p)$.

Alors il existe un $\mathcal{C}^1$*–difféomorphisme* φ *entre deux voisinages de* 0 *dans* $\mathbb{R}^n$ *tel que :*

(i) $\varphi(0) = 0$ *;*

(ii) pour x *dans le premier des deux voisinages suscités, on a, en posant* $u = \varphi(x)$ *:*

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \ldots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_n^2$$

1. Oui, je sais.

Démonstration : Soit x au voisinage de 0. Alors, par formule de Taylor avec reste intégral, $f(x)-f(0) = {}^t x Q(x) x$, où $Q(x)$ est la matrice symétrique inversible (car $d^2 f(0)$ est non dégénérée) $\int_0^1 (1-t) d^2 f(tx) dt$. Q définit alors une applications $\mathcal{C}^1$ au voisinages de 0. Par le lemme 1, comme $Q(0) \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$, il existe alors une matrice $M(x) \in GL_n(\mathbb{R})$, avec $x \mapsto M(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de l'origine, telle que :

$$Q(x) = {}^t M(x) Q(0) M(x)$$

Ainsi, si on pose $y := M(x)x$ on a :

$$f(x) - f(0) = {}^t y Q(0) y$$

Or $Q(0) = \dfrac{1}{2} d^2 f(0)$ est de signature $(p, n-p)$ donc par loi d'inertie de Sylvester il existe un changement de base $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que, si on pose $u := A^{-1} y$:

$$\begin{aligned} {}^t y Q(0) y &= {}^t u \, {}^t A Q(0) A u \\ &= u_1^2 + \ldots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_n^2 \end{aligned}$$

Enfin, comme $x \mapsto u := A^{-1} M(x) x$ a pour différentielle en l'origine $A^{-1} M(0) \in GL_n(\mathbb{R})$, il réalise par théorème d'inversion locale un $\mathcal{C}^1$–difféomorphisme entre deux voisinages de l'unité, d'où le résultat.

Détails supplémentaires :

– Rappelons l'hilarante formule de Taylor avec reste intégral : si f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ alors pour tous $a, h \in \mathcal{U}$ tels que $[a, a+h] \subset \mathcal{U}$ on a [2] :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} d^i f(a)(h)^i + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} d^{k+1} f(a+th)(h)^{k+1} dt$$

Références

[Rou09] François Rouvière. *Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation (3e édition)*. Cassini, 2009.

2. Comme il est d'usage dans le monde enchanté du calcul différentiel, on note $(h)^i$ le i–uplet (de vecteurs) $(\underbrace{h, \ldots, h}_{i \text{ fois}})$.