Théorème de Liapounov

Arnaud Girand

17 juin 2012

Référence :
- [Rou09], p. 138–143

Proposition 1
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que :
- $f(0) = 0$;
- $\mathrm{Sp}(df(0)) \subset \{\Re < 0\}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$.
On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(y) \\ y(0) = x \end{array} \right. , \text{ d'inconnue } y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \tag{1}$$

Alors 0 est un point d'équilibre attractif de (1), i.e il existe $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(0)$ tel que pour $x \in V$ la solutions y de (1) converge exponentiellement vers 0 à l'infini, i.e :

$$\exists K_x, a_x > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|y(t)\| \leq K_x e^{-a_x t}$$

Démonstration : On pose $A := df(0)$ et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres *distinctes* de A. Alors, si $\chi_A = (-1)^n \prod_{j=1}^k (X - \lambda_j)^{m_j}$, le lemme des noyaux s'écrit :

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^k \ker((A - \lambda_j I_n)^{m_j})$$

De fait [1], x s'écrit de façon unique comme $x_1 + \ldots + x_k$, les $x_j \in E_j := \ker((A - \lambda_j I_n)^{m_j})$. Alors les E_j sont A–stables et :

$$\begin{aligned} \forall j \in [k],\ \forall t \in \mathbb{R},\ e^{tA} x_j &= e^{t\lambda_j I_n} e^{t(A - \lambda_j I_n)} x_j \\ &= e^{t\lambda_j} e^{t(A - \lambda_j I_n)} x_j \\ &= e^{t\lambda_j} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} (A - \lambda_j I_n)^p \right) x_j \\ &= e^{t\lambda_j} \left(\sum_{p=0}^{m_j - 1} \frac{t^p}{p!} (A - \lambda_j I_n)^p \right) x_j \text{ car } x_j \in E_j \end{aligned}$$

Si on note $\|.\|$ la norme induit par le produit scalaire canonique $\langle ., . \rangle$ sur $\mathbb{R}^n$, on a alors :

$$\begin{aligned} \forall j \in [k],\ \forall t \in \mathbb{R},\ \|e^{tA} x_j\| &= \left\| e^{t\lambda_j} \left(\sum_{p=0}^{m_j - 1} \frac{t^p}{p!} (A - \lambda_j I_n)^p \right) x_j \right\| \\ &\leq e^{t\Re(\lambda_j)} C_j (1 + |t|)^{m_j - 1} \|x_j\| \text{ où } C_j := \max_{0 \leq p < m_j} \|A - \lambda_j I_n\|^p \\ &\leq C_0 e^{t\Re(\lambda_j)} (1 + |t|)^{n-1} \|x_j\| \text{ où } C_0 := \max_{1 \leq j \leq k} \left(C_j \frac{(1 + |t|)^{n-1} \|x_j\|}{(1 + |t|)^{m_j - 1} \|x_j\|} \right) \end{aligned}$$

1. Quitte à identifier $\mathbb{R}^n$ à un s-e.v de $\mathbb{C}^n$.

D'où :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R},\ \|e^{tA}x\| &\leq \sum_{j=1}^{k} \|e^{tA}x_j\| \\
&\leq C_0(1+|t|)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{k} e^{t\Re(\lambda_j)}\right) \max_{1\leq j\leq k} \|x_j\| \\
&\leq\leq C_0(1+|t|)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{k} e^{t\Re(\lambda_j)}\right) \|x\|
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\exists P \in \mathbb{C}[X], \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \|e^{tA}x\| \leq P(|t|)\left(\sum_{j=1}^{k} e^{t\Re(\lambda_j)}\right)\|x\| \tag{2}$$

On considère le linéarisé en 0 de (1) :

$$\begin{cases} z' = df(0)(y) = Ay \\ z(0) = x \end{cases}, \text{ d'inconnue } z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \tag{3}$$

(3) admet pour unique solution globale la fonction $z : t \mapsto e^{tA}x$. De plus, comme les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative, il existe $a > 0$ tel que $\forall j \in [k],\ \Re(\lambda_j) < -a$. De fait on peut majorer $t \mapsto P(|t|)\left(\sum_{j=1}^{k} e^{t\Re(\lambda_j)}\right)e^{at}$ sur $\mathbb{R}_+$ par une constante $C > 0$. L'équation (2) nous donne alors :

$$\forall t \geq 0, \quad \|z(t)\| \leq Ce^{-at}\|x\|$$

Et donc 0 est un point d'équilibre attractif pour (3).

On considère à présent l'application suivante :

$$\begin{aligned}
b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\
(x, y) &\mapsto \int_0^{\infty} \langle e^{tA}x, e^{tA}y\rangle dt
\end{aligned}$$

Alors b est bien définie car :

$$\begin{aligned}
\forall t \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ |\langle e^{tA}x, e^{tA}y\rangle| &\leq \|e^{tA}x\|\|e^{tA}y\| \text{ par Cauchy–Schwarz} \\
&\leq C^2 e^{-2at}\|x\|\|y\|
\end{aligned}$$

Il s'agit de plus d'une forme bilinéaire symétrique : notons donc q la forme quadratique associée. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) = \int_0^{\infty} \|e^{tA}x\|^2 dt \geq 0$$

Comme $e^{tA} \in GL_n(\mathbb{R})$, q est également définie positive par théorème de nullité de l'intégrale pour une fonction positive.

On a alors, pour $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla q(x), Ax\rangle &= dq(x)(Ax) \\
&= \int_0^{\infty} 2\langle e^{tA}x, e^{tA}Ax\rangle dt \\
&= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt}(\langle e^{tA}x, e^{tA}x\rangle dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \left[\|e^{tA}x\|^2\right]_0^T
\end{aligned}$$

I.e [2] :

$$\langle \nabla q(x), Ax\rangle = -\|x\|^2 \tag{4}$$

2. Les amateurs remarquerons que q est donc une fonction de Liapounov pour (3).

Revenons en à nos moutons différentiels. Le théorème de Cauchy–Lipschitz nous affirme qu'il existe une unique solution maximale y de (1), définie sur un intervalle de la forme $I := [0, \alpha)$, avec $\alpha \in (0, \infty)$. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} q(y) &= dq(y)(y') \\ &= 2b(y, y') \\ &= 2b(y, Ay) + 2b(y, r(y)) \text{ où } r(y) := f(y) - Ay \\ &= -\|y\|^2 + 2b(y, r(y))\end{aligned}$$

Or, par inégalité de Cauchy–Schwarz $|b(y, r(y)| \leq \sqrt{q(y)}\sqrt{q(r(y))}$. De plus, $r(y) = f(y) - f(0) - df(0)(y)$ (car $f(0) = 0$) ce qui implique, par définition de la différentielle $df(0)$ et continuité de $v \mapsto \sqrt{q(r(v))}$ que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ (q(y) \leq \alpha) \Rightarrow (\sqrt{q(r(y))} \leq \varepsilon\sqrt{q(y)})$$

Et donc sous ces conditions $2b(y, r(y)) \leq 2\varepsilon q(y)$.

L'espace $\mathbb{R}^n$ étant de dimension finie, les normes $\|.\|$ et $\sqrt{q}$ (q est définie positive) sont équivalentes et donc $\exists K > 0,\ Kq(y) \leq \|y\|^2$ d'où si on prend $\beta \leq K - 2\varepsilon$ et $q(y) \leq \alpha$:

$$\frac{d}{dt} q(y) \leq -\beta q(y)$$

Supposons à présent que $q(x) \leq \alpha$. Alors, pour tout $t \geq 0$, $q(y(t)) < \alpha$. En effet, dans le cas contraire, si on pose $t_0 := \inf\{t > 0 \,|\, q(y(t)) = \alpha\}$ on a :

$$(q \circ y)'(t_0) \leq -\beta q(y(t_0)) = -\beta\alpha < 0$$

Donc il existe un $t \leq t_0$ tel que $q(y(t)) < \alpha$, ce qui contredit la minimalité de t_0. Ainsi, on a bien :

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{d}{dt} q(y(t)) \leq -\beta q(y(t))$$

Et donc :

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{d}{dt}(e^{\beta t} q(y(t))) = e^{\beta t}((q \circ y)'(t) + \beta q(y(t))) \leq 0$$

La fonction $t \mapsto e^{\beta t} q(y(t))$ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$ ce qui entraîne :

$$\forall t \geq 0, \quad e^{\beta t} q(y(t)) \leq e^{\beta \times 0} q(y(0)) = q(x)$$

D'où :

$$\forall t \geq 0, \quad q(y(t)) \leq e^{-\beta t} q(x)$$

D'où le résultat par équivalence entre $\|.\|$ et $\sqrt{q}$.

Détails supplémentaires :

– *Différentielle de q.* Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$. Alors :

$$q(x + ty) = q(x) + 2tb(x, y) + t^2 q(y)$$

De fait :

$$\frac{d}{dt}(q(x + ty)) = 2b(x, y) + 2tq(y)$$

In fine [3] :

$$dq(x)(y) = \left.\frac{d}{dt}(q(x + ty))\right|_{t=0} = 2b(x, y)$$

Références

[Rou09] François Rouvière. *Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation (3e édition)*. Cassini, 2009.

3. On peut retrouver "plus rapidement" ce résultat en se souvenant de l'expression de la différentielle d'une forme multilinéaire.