# Prolongement méromorphe de la fonction Γ d'Euler

Arnaud Girand

17 juin 2012

Références :
- [BMP05], p. 82–83 et [QZ95] p. 305–306

Prérequis :
- holomorphie sous le signe intégral ;
- sommation méromorphe.

**Proposition 1**
*On considère l'application définie (formellement) de la façon suivante :*

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

*Alors :*
- *(i) cette expression définit une fonction holomorphe de* $\mathcal{P} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \Re(z) > 0\}$ *dans* $\mathbb{C}$ *;*
- *(ii) la fonction* $\Gamma : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ *admet un prolongement méromorphe à* $\mathbb{C}$ *de pôles les entiers négatifs.*

Démonstration :

$(i)$ ([QZ95]) On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} g : \mathcal{P} \times \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{C} \\ (z,t) &\mapsto e^{-t} t^{z-1} \end{aligned}$$

Alors :
- pour tout $t > 0$, l'application $g(.,t)$ est holomorphe de dérivée $\dfrac{\partial}{\partial z}(e^{-t} e^{(z-1)\ln(t)}) = \ln(t) g(.,t)$ ;
- soit $K$ un compact de $\mathcal{P}$. Posons $M := \max_{z \in K} \Re(z)$ et $\varepsilon := \min_{z \in K} \Re(z)$ ; comme $K \subset \mathcal{P}$ alors $\varepsilon > 0$. Alors, pour tout $z \in K$ et $t > 0$ :
  - si $t \in (0,1)$, $|e^{-t} t^{z-1}| = |e^{-t} e^{(z-1)\ln(t)}| \leq t^{\varepsilon - 1} = \dfrac{1}{t^{1-\varepsilon}}$ ;
  - si $t \geq 1$ ,$|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{\Re(z)-1} \leq e^{-t} t^{M-1} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

D'où le résultat par proposition 3 (cf. infra).

$(ii)$ ([BMP05]) Soit $z \in \mathcal{P}$. Alors :

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

De plus, pour $t \in [0,1]$ :

$$e^{-t} t^{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}$$

On souhaite appliquer le théorème de Fubini à la mesure produit des mesures de Lebesgue et de comptage et à la fonction $g : (n,t) \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}$. Pour ce faire il nous suffit de démontrer que $g$ est intégrable, i.e que :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} \right| dt < \infty$$

Or si $t \in (0,1]$, $t^z = t^{\Re(z)}$ donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} \right| = t^{\Re(z)-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = t^{\Re(z)-1} e^t$$

Comme $\Re(z) > 0$, $\Re(z) - 1 > -1$ donc $t \mapsto t^{\Re(z)-1}e^t$ est intégrable sur $(0, 1]$ d'où le résultat par domination. De fait, par Fubini :

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1}dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}\end{aligned}$$

Au final :

$$\forall z \in \mathcal{P}, \quad \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$

On définit ensuite la suite de fonctions $f_n : z \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n!(z+n)}$. Alors :

- pour tout $n \geq 0$, $f_n$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, de pôle (simple) $-n$ ;
- pour tout compact $K \subset\subset \mathbb{C}$, il existe $N \geq 0$ tel que $K \subset \overline{\mathcal{B}}(0, N)$. De fait, pour $n \geq N+1$, $f_n$ n'a aucun pôle dans $K$ et :

  $$\forall z \in K,\ |z+n| = |n-(-z)| \geq |n-|z|| = n-|z| \geq n-N \text{ d'où } |f_n(z)| \leq \frac{1}{n!(n-N)}$$

  Ainsi $\|f\|_{\infty,K} \leq \dfrac{1}{n!(n-N)}$ et donc $\sum_{(n \geq N_K)} f_n$ converge normalement uniformément sur $K$.

Par la proposition 2 (cf. infra) l'application $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est donc méromorphe sur $\mathbb{C}$ et l'ensemble de ses pôles est $-\mathbb{N}$. En utilisant les mêmes majorations qu'au point $(i)$ on montre que $z \mapsto \int_1^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (dans le cas $t \geq 1$ on n'a pas utilisé que $\Re(z) > 0$). Ainsi, $\Gamma$ admet le prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ suivant :

$$\Gamma : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$

**Détails supplémentaires :**

- Soit $t > 0$. On rappelle que pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ on définit :

  $$t^z := e^{x\ln(t)}e^{iy\ln(t)} =: t^x t^{iy}$$

- On rappelle le résultat suivant (cf. [BMP05]) :

  **Proposition 2**
  *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$.*
  *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions méromorphes sur $\mathcal{U}$.*
  *On suppose que pour tout compact $K \subset\subset \mathcal{U}$ il existe $N_K \geq 0$ tel que :*
  *– pour tout $n \geq N_K$ $f_n$ n'a aucun pôle dans $K$ ;*
  *– la série $\sum_{(n \geq N_K)} f_n$ converge uniformément sur $K$.*
  *Alors :*

  *(i) la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ ainsi définie est méromorphe sur $\mathcal{U}$, et l'ensemble de ses pôles est la réunion de ceux des $f_n$ ;*

  *(ii)*

  $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$$

- On a fait usage de l'énoncé suivant du théorème d'holomorphie sous le signe intégral (cf. [QZ95], p. 301 ) :

**Proposition 3**
*Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré.*
*Soit* $\mathcal{U}$ *un ouvert de* $\mathbb{C}$.
*Soit* $f : \mathcal{U} \times X \to \mathbb{C}$ *telle que :*
– *pour tout* $z \in \mathcal{U}$, $f(z, .) \in L^1(X)$ *;*
– *pour presque tout* $x \in X$, $f(., x)$ *est holomorphe sur* $\mathcal{U}$ *;*
– *pour tout compact* $K$ *de* $\mathcal{U}$ *il existe* $g \in L^1(X)$ *positive telle que :*

$$\forall z \in K, \quad pp\ x \in X, \quad |f(z, x)| \leq g(x)$$

*Alors :*

*(i)* $F : z \mapsto \int_X f(z, x) d\mu(x)$ *est holomorphe sur* $\mathcal{U}$ *;*

*(ii)*

$$\forall z \in \mathcal{U}, \quad F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z, x) d\mu(x)$$

# Références


[BMP05] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation (2e édition).* H & K, 2005.

[QZ95] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Éléments d'analyse pour l'agrégation.* Masson, 1995.