Formule d'inversion de Fourier

Arnaud Girand

18 août 2012

Référence :
- [QZ07] p. 331–332

Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on définit sa transformée de Fourier comme suit :

$$\widehat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x) dx$$

Proposition 1
Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \widehat{\widehat{f}}(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \widehat{f}(t) dt$$

Démonstration : Pour $\varepsilon > 0$ on pose $f_\varepsilon : t \mapsto e^{-\varepsilon t^2} e^{itx} \widehat{f}(t)$. Alors :
- les f_ε sont L^1 ;
- $f_\varepsilon(t) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} e^{itx} \widehat{f}(t)$ presque partout sur $\mathbb{R}$;
- $|f_\varepsilon| \leq |\widehat{f}| \in L^1(\mathbb{R})$.

De fait, par théorème de convergence dominée on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon t^2} e^{itx} \widehat{f}(t) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \widehat{f}(t) dt \tag{1}$$

Remarquons à présent à présent que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |e^{it(x-y)} e^{-\varepsilon t^2} f(y)| dy dt \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon t^2} dt \int_{\mathbb{R}} |f(y)| dy < \infty$$

De fait, par théorème de Fubini–Tonelli on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx - \varepsilon t^2} \widehat{f}(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{it(x-y)} e^{-\varepsilon t^2} f(y) dy dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{it(x-y)} e^{-\varepsilon t^2} f(y)| dt dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) \int_{\mathbb{R}} e^{it(x-y)} e^{-\varepsilon t^2} dt dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{(y-x)^2/4\varepsilon} dy \text{ (cf. infra)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} f(x + 2\sqrt{\varepsilon} y) dy \text{ via } y \mapsto x + 2\sqrt{\varepsilon} y)
\end{aligned}$$

Une nouvelle application du théorème de convergence dominée nous indique que :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} f(x + 2\sqrt{\varepsilon} y) dy \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy f(x) = \sqrt{\pi} f(x)$$

D'où le résultat via la relation (1).

Détails supplémentaires :

- Ce développement est trop court en l'état, il sera donc nécessaire de l'allonger le moins artificiellement possible. Le jour de mon oral d'agrégation, j'ai proposé en première partie la démonstration du fait que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On pourrait aussi inclure le calcul de l'intégrale de Gauss "généralisée" (cf. infra, ou alors la version avec prolongement analytique). Tous ces "petits" résultats se trouvent dans [QZ07] dans un voisinage de la page 330.
- Il nous reste à justifier le calcul de $\int_{\mathbb{R}} e^{it(x-y)}e^{-\varepsilon t^2}dt$. Posons :

$$I(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}e^{-\varepsilon t^2}dt$$

Alors comme la fonction $(x,t) \mapsto e^{-itx}e^{-\varepsilon t^2}$ est $\mathcal{C}^1$ selon sa première variable, intégrable selon sa deuxième et que sa dérivée "en x" est dominée par $t \mapsto te^{-\varepsilon t^2}$ qui est intégrable on a, par théorème de dérivation sous le signe intégral que I est de classe $\mathcal{C}^1$ et que :

$$\begin{aligned}
I'(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}(e^{-itx}e^{-\varepsilon t^2})dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} (-it)e^{-itx}e^{-\varepsilon t^2}dt \\
&= -\frac{i}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\frac{d}{dt}(e^{-\varepsilon t^2})dt \\
&= \frac{i}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt}(e^{-itx})e^{-\varepsilon t^2}dt \text{ en intégrant par parties} \\
&= \frac{i}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} (-ix)e^{-itx}e^{-\varepsilon t^2}dt \\
&= \frac{x}{2\varepsilon}I(x)
\end{aligned}$$

De fait $I(x) = I(0)e^{(x/2\varepsilon)/2}$. Or :

$$\begin{aligned}
I(0) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon t^2}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt \text{ via } t \mapsto \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon}}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{it(x-y)}e^{-\varepsilon t^2}dt = I(y-x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon}}e^{(y-x)^2/4\varepsilon}$$

Références

[QZ07] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Éléments d'analyse pour l'agrégation (3e édition).* Dunod, 2007.