Dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Arnaud Girand

17 juin 2012

Référence :
- [FGN07], p. 329–331

Proposition 1
Soit $\mathbb{K}$ un corps.
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on définit l'application suivante :

$$\begin{aligned} f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\to \mathbb{K} \\ X &\mapsto \operatorname{Tr}(AX) \end{aligned}$$

Alors l'application suivante est un isomorphisme :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* \\ A &\mapsto f_A \end{aligned}$$

Démonstration : Il est clair que f est linéaire et il ne nous reste qu'à (par un argument de dimension) montrer que f est injective ; soit donc $A \in \ker(f)$. Alors, si on note $(E_{i,j})_{i,j}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a, pour tous $i_0, j_0 \in [n]$:

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Tr}(AE_{i_0,j_0} \\ &= \operatorname{Tr}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}E_{i,j}\right)E_{i_0,j_0}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i_0}\operatorname{Tr}\left(E_{i,j_0}\right) \text{ car } E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell} \\ &= a_{j_0,i_0} \end{aligned}$$

Et donc $A = 0$, d'où le résultat.

Corollaire 1.1
Soit $\mathbb{K}$ un corps.
Soit $\phi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ telle que :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \phi(XY) = \phi(YX)$$

Alors :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \phi = \lambda \operatorname{Tr}$$

Démonstration : Soit A tel que $\phi = f_A$. Alors l'hypothèse se réécrit :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \operatorname{Tr}(AXY) = \operatorname{Tr}(AYX)$$

Or, si $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\operatorname{Tr}(AYX) = \operatorname{Tr}(XAY)$ et donc on a :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \operatorname{Tr}((AX - XA)Y) = 0$$

Et donc, par injectivité de f on a :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad AX = XA$$

Ce qui signifie que pour tous $i, j \in [n]$ on a $AE_{i,j} = E_{i,j}A$ soit :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k}E_{i,k}$$

Et donc pour tous $i, j \in [n]$ $a_{i,i} = a_{j,j}$ et tous les autres coefficients de A sont nuls. De fait, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$, d'où le résultat.

Corollaire 1.2
Soit $\mathbb{K}$ un corps.
Alors tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ coupe $GL_n(\mathbb{K})$.

Démonstration : Soit $\mathcal{H}$ un tel hyperplan ; alors il existe une forme linéaire non nulle ϕ telle que $\mathcal{H} = \ker(\phi)$. Soit alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\phi = f_A$ et posons $r := \mathrm{rg}(A)$. On sait qu'alors il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PJ_rQ$, où J_r est la matrice par blocs $\begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$.

De fait, si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\begin{aligned} \phi(X) &= \mathrm{Tr}(AX) \\ &= \mathrm{Tr}(PJ_rQX) \\ &= \mathrm{Tr}(J_rQXP) \end{aligned}$$

Pour peu que l'on puisse trouver une matrice $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Tr}(J_rY) = 0$, on aura le résultat en posant $X = Q^{-1}YP^{-1}$. Or la matrice suivante convient :

$$Y := \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Références

[FGN07] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X - ENS, Algèbre 1 (2e édition)*. Cassini, 2007.