Théorème de Caratheodory

Arnaud Girand

17 juin 2012

Référence :
- [FGN10], p. 316 – 317

Proposition 1 (Caratheodory)
Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non vide.
On note $\mathcal{C}(X)$ l'enveloppe convexe de X.
Alors tout point de $\mathcal{C}(X)$ est barycentre à coefficients positifs d'une famille de $n+1$ points de X.

Démonstration : Soit $x \in \mathcal{C}(X)$. Par définition de l'enveloppe convexe, x est barycentre à coefficients positifs de points de x, i.e

$$\exists p > 0,\ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \geq 0,\ \exists x_1, \dots, x_p \in X, \text{ tels que } \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1 \text{ et } \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k = x$$

Supposons $p > n+1$. Alors $p-1 > n = \dim(\mathbb{R}^n)$ donc la famille $(x_i - x_1)_{2 \leq i \leq p}$ est liée dans $\mathbb{R}^n$, i.e il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que ;

$$\sum_{i=2}^{p} \alpha_i (x_i - x_1) = 0 \tag{1}$$

Posons également :

$$\alpha_1 := -\sum_{i=2}^{p} \alpha_i$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i &= \sum_{i=2}^{p} \alpha_i x_i + \alpha_1 x_1 \\
&= \sum_{i=2}^{p} \alpha_i x_1 + \alpha_1 x_1 \text{ par (1)} \\
&= \sum_{i=2}^{p} \alpha_i x_1 - \left(\sum_{i=2}^{p} \alpha_i \right) x_1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ergo :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + t \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + t\alpha_i) x_i$$

Les α_i sont non tous nuls de somme nul donc il existe un indice i tel que $\alpha_i < 0$. De fait, on peut poser :

$$\tau := \min \left\{ -\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \,\middle|\, \alpha_i < 0 \right\}$$

On pose ensuite pour tout $i \in [p]$ $\mu_i := \lambda_i + \tau \alpha_i$. Alors :
- les μ_i sont positifs ou nuls par construction de τ ;
- on a :

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i + \tau \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$$

– l'un des μ_i au moins est nul (prendre l'indice j pour lequel le minimum τ est atteint).
In fine :

$$\sum_{i\neq j} \mu_i x_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + \tau\alpha_i) x_i = x$$

On a donc écrit x comme barycentre à coefficients positifs de $p-1$ points de X. On obtient alors le résultat en itérant ce procédé.

Corollaire 1.1

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ *un* compact *non vide.*
Alors $\mathcal{C}(X)$ *est compacte.*

Démonstration : On considère le simplexe Λ de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Lambda := \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^{n+1} \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1 \right\}$$

Définissons également l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : \Lambda \times X^{n+1} &\to \mathbb{R}^n \\ (\lambda, x) &\mapsto \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k \end{aligned}$$

Alors f est continue (car — entre autres — bilinéaire en dimension finie) et par théorème de Caratheodory, $\mathcal{C}(X) = f(\Lambda \times X^{n+1})$. De fait, par compacité de $\Lambda \times X^{n+1}$, $\mathcal{C}(X)$ est bien compacte.

Détails supplémentaires :

– *Compacité du simplexe.* Le simplexe Λ est clairement borné (par exemple par 1 en norme $\|.\|_\infty$. De plus, si $(\lambda^p)_p \in \Lambda^{\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda \in \mathbb{R}^{n+1}$ (par exemple pour $\|.\|_\infty$) alors par convergence coordonnée par coordonnée :

$$1 = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k^p \xrightarrow[p\to\infty]{} \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k$$

Donc $\lambda \in \Lambda$ et donc le simplexe est fermé, d'où le résultat par dimension finie.

Références

[FGN10] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X - ENS, Algèbre 3*. Cassini, 2010.