Théorème de Burnside

Arnaud Girand

15 octobre 2013

Référence :
- [FGN09], p. 185–186

Lemme 1 ([FGN09], p. 111)
Soit $\mathbb{K}$ un sous–corps de $\mathbb{C}$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall k \geq 1, \quad \mathrm{Tr}(A^k) = 0$$

Alors A est nilpotente.

Démonstration : Supposons A non nilpotente : on peut alors noter $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ($r \geq 1$) ses valeurs propres (sur $\mathbb{C}$) non nulles et $n_1, \dots, n_r$ leurs multiplicités respectives. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1}TP$ où T est triangulaire de diagonale $(\underbrace{\lambda_1 \dots \lambda_1}_{n_1} \dots \underbrace{\lambda_r \dots \lambda_r}_{n_r}, 0 \dots 0)$. De plus, comme pour $k \geq 1$ on a $A^k = P^{-1}T^kP$ alors :

$$\forall k \geq 1, \quad 0 = \mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{r} n_i \lambda_i^k$$

De fait, le vecteur $\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix}$ est solution du système suivant :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & & & \lambda_r^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^r & \dots & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = 0 \tag{1}$$

Le déterminant de ce système est alors, par déterminant de Vandermonde (cf infra) :

$$\left(\prod_{i=1}^{r} \lambda_i \right) \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

Donc les n_i sont tous nuls, ce qui est absurde.

Proposition 1 (Burnside)
Soit $G \leq GL_n(\mathbb{C})$.
Alors G est fini si et seulement G est d'exposant fini[1]*.*

Démonstration : Le sens direct est immédiat par théorème de Lagrange. Pour le sens indirect, commençons par fixer une base $(M_i)_{1 \leq i \leq m} \in G^m$ du s-e.v $\langle G \rangle_{\mathbb{C}}$ engendré par G dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : G &\to \mathbb{C}^m \\ A &\mapsto (\mathrm{Tr}(AM_i))_{1 \leq i \leq m} \end{aligned}$$

1. I.e $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $\forall g \in G$, $g^N = I_n$.

Supposons que l'on ait A et B dans G telles que $f(A) = f(B)$. Alors, par linéarité de la trace on a :

$$\forall M \in \langle G\rangle_{\mathbb{C}}, \quad \mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(BM)$$

En particulier si on pose $D := AB^{-1} \in G$ et si $k \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(D^k) &= \mathrm{Tr}(A\underbrace{B^{-1}D^{k-1}}_{\in G\subset\langle G\rangle_{\mathbb{C}}}) \\
&= \mathrm{Tr}(BB^{-1}D^{k-1} \\
&= \mathrm{Tr}(D^{k-1} \\
&\vdots \\
&= \mathrm{Tr}(I_n) \\
&= n
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}((D-I_n)^k) &= \mathrm{Tr}\left(\sum_{j=0}^{k} C_k^j(-1)^j D^{k-j}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{k} C_k^j(-1)^j \mathrm{Tr}(D^{k-j}) \\
&= n(1-1)^k \\
&= 0
\end{aligned}$$

De fait $D - I_n$ est nilpotente (lemme 1).

Comme G est d'exposant fini $N \geq 1$, toutes ses matrices sont diagonalisables (car racines du polynôme scindé simple $X^N - 1$). Donc D est diagonalisable ce qui implique que $D - I_n$ l'est également (car $\forall P \in GL_n(\mathbb{C})$, $P^{-1}(D-I_n)P = P^{-1}DP - I_n$). Donc, par nilpotence, $D = I_n$ et donc f est injective.

Remarquons ensuite que $f(G) \subset X^m$ où $X := \{\mathrm{Tr}(A) \,|\, A \in G\}$ est fini car les valeurs propres d'éléments de G sont des racines N–ièmes de l'unité. De fait, par injectivité de f, G est fini.

Détails supplémentaires :

– *Déterminant de Vandermonde.* On désire calculer le déterminant suivant ([FGN09], p. 17), les $x_i \in \mathbb{C}$:

$$V(x_1,\ldots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Il est clair que si deux des x_i sont égaux ce déterminant est nul. Dans le cas contraire on pose :

$$P := V(x_1,\ldots,x_{n-1},X) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$$

En développant selon la première colonne on trouve que le coefficient de degré $n-1$ de P est $V(x_1,\ldots,x_{n-1}$; il est également clair d'après la remarque précédente que si $i \in [n-1]$, $P(x_i) = 0$. De fait, le polynôme unitaire de degré $n-1$ $\prod_{i\in[n-1]}(X - x_i)$ divise P et donc :

$$P = V(x_1,\ldots,x_{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}(X - x_i)$$

Ergo :

$$V(x_1,\ldots,x_n) = P(x_n) = V(x_1,\ldots,x_{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i)$$

Et donc par récurrence :

$$V(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$$

Références

[FGN09] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X - ENS, Algèbre 2 (2e édition).* Cassini, 2009.