Lemme de Borel

Arnaud Girand

17 juin 2012

Référence :
- [Rou09], p. 359 – 360

Proposition 1 (Borel)
Soit $(a_k)_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Alors il existe $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *telle que :*

$$\forall k \geq 0, \qquad u^{(k)}(0) = a_k$$

Démonstration : Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f(x) = 1$ si $|x| \leq \frac{1}{2}$ et $\mathrm{supp}(f) \subset (-1, 1)$. On fixe une suite $(\lambda_k)_k$ de réels strictement positifs et on définit :

$$\forall k \geq 0, \qquad f_k : x \mapsto f(\lambda_k x) \frac{a_k}{k!} x^k$$

Cherchons à présent à faire converger $\sum f_k$ et ses dérivées.

Soit $m \in \mathbb{N}$. Alors, par formule de Leibniz :

$$\forall k \geq m, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k^{(m)}(x) = a_k \sum_{p=0}^{m} C_m^p f^{(m-p)} \lambda_k^{m-p} \frac{x^{k-p}}{(k-p)!}$$

On pose [1] :

$$M_m := \max_{0 \leq k \leq m} \max_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$$

Pour $k \geq m$ et $x \in \mathbb{R}$ alors :
- si $|x| > \frac{1}{\lambda_k}$ alors $f^{(m)}(\lambda_k x) = 0$ (car $\mathrm{supp}(f) \subset (-1, 1)$) donc $f_k^{(m)}(x) = 0$;
- sinon, i.e si $|x| \leq \frac{1}{\lambda_k}$:

$$\begin{aligned}
|f_k^{(m)}(x)| &\leq M_m |a_k| \sum_{p=0}^{m} C_m^p \lambda_k^{m-p} \frac{|x|^{k-p}}{(k-p)!} \\
&\leq M_m |a_k| \sum_{p=0}^{m} C_m^p \lambda_k^{m-p} \frac{\lambda_k^{p-k}}{(k-p)!} \\
&\leq M_m |a_k| \lambda_k^{m-k} \sum_{p=0}^{m} C_m^p \frac{1}{(k-p)!} \\
&\leq M_m |a_k| \lambda_k^{m-k} \frac{1}{(k-m)!} \sum_{p=0}^{m} C_m^p \\
&= \frac{2^m M_m |a_k|}{(k-m)! \lambda_k^{k-m}}
\end{aligned}$$

Ainsi, si on prend pour tout k $\lambda_k := \max(1, |a_k|)$ alors pour tous $(k, m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k \geq m+1$ on a $\lambda_k^{k-m} \geq \lambda_k \geq |a_k|$. Ainsi :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall k \geq m+1, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f_k^{(m)}(x)| \leq \frac{2^m M_m}{(k-m)!}$$

1. Le deuxième "max" est bien un maximum car f est à support compact.

D'où, comme les $f_k^{(m)}$ sont continues à support compact donc bornées :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall k \geq m+1, \qquad \|f_k^{(m)}\|_\infty \leq \frac{2^m M_m}{(k-m)!} \tag{1}$$

De fait, la série $\sum f_k^{(m)} = \sum_{(0\leq k\leq m)} f_k^{(m)} + \sum_{(k\geq m+1)} f_k^{(m)}$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction $u := \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et dérivable terme à terme. En particulier :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad u^{(m)}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)}(0) = a_k \text{ car } \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\lambda_k/2, \lambda_k/2], \quad f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$$

D'où le résultat.

Détails supplémentaires :

- On trouve dans [Rou09], p. 355 comment construire des fonctions plateau $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. Pour $a < b < c < d$ on définit :

$$\psi : t \mapsto \begin{cases} e^{-1/t} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \ , \alpha : t \mapsto \psi(t)\psi(1-t) \text{ et } \beta : t \mapsto \frac{\int_0^t \alpha(s)ds}{\int_0^1 \alpha(s)ds}$$

  Alors la fonction $f : x \mapsto \beta\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\beta\left(\frac{d-x}{d-c}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, égale à 1 sur $[b, c]$ et à support contenu dans $[a, d]$.

Références

[Rou09] François Rouvière. *Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation (3e édition).* Cassini, 2009.