Théorème de Bernstein

Arnaud Girand

17 juin 2012

Référence :
- [QZ07] p. 518–519

Proposition 1 (Bernstein)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$.
On pose $\omega : (h \in [0,1]) \mapsto \sup\{|f(u)-f(v)| \mid |u-v| \leq h\}$.
Pour $n \geq 1$ on définit le n–ième polynôme de Bernstein de f :

$$B_n(f) : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Alors :

(i) il existe $C > 0$ tel que $\forall n \geq 1$, $\|f - B_n(f)\|_\infty \leq C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; en particulier $(Bn(f))_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$;

(ii) l'inégalité précédente est optimale : il existe $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$ lipschitzienne et $\delta > 0$ tels que $\forall n \geq 1$, $\|f - B_n(f)\|_\infty \geq \frac{\delta}{\sqrt{n}}$.

Démonstration :

(*i*) Soit $x \in [0,1]$. On peut montrer (cf. infra) que pour tous $\lambda, h \geq 0$ tels que $\lambda h \in [0,1]$ on a $\omega(\lambda h) \leq (\lambda+1)\omega(h)$. De fait, si on se donne $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables de Bernoulli i.i.d de paramètre x et si on note pour $n \geq 1$ $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$ on a :

$$\omega\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right) \leq \left(\sqrt{n}\left|x - \frac{S_n}{n}\right| + 1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Remarquons ensuite que l'on a $\mathbb{E}(f(x)) = f(x)$ et que pour tout $n \geq 1$ $\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = B_n(f)(x)$ d'où :

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(f)(x)| &= \left|\mathbb{E}\left(f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)\right| \\
&\leq \mathbb{E}\left(\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left(\omega\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right)\right) \\
&\leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\mathbb{E}\left(\sqrt{n}\left|x - \frac{S_n}{n}\right| + 1\right)
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sqrt{n}\left|x - \frac{S_n}{n}\right| + 1\right) &= 1 + \sqrt{n}\mathbb{E}\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right) \\
&\leq 1 + \sqrt{n}\left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_2 \quad \text{par inégalité de Hölder, où } \|X\|_2 = \sqrt{\mathbb{E}(|f|^2)}
\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|^2\right) &= x^2-2\frac{x}{n}\mathbb{E}(S_n)+\frac{1}{n^2}\mathbb{E}(S_n^2)\\
&= x^2-2x^2+\frac{1}{n^2}\left(\sum_{1\le i\neq j\le n}\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)+\sum_{i=1}^n\mathbb{E}(X_i^2)\right)\\
&= -x^2+\frac{n^2-n}{n^2}x^2+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n x\\
&= \frac{x(1-x)}{n}
\end{aligned}$$

Ergo :

$$\mathbb{E}\left(\sqrt{n}\left|x-\frac{S_n}{n}\right|+1\right)\le 1+\sqrt{n}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\le\frac{3}{2}$$

Finalement :

$$\|f-B_n(f)\|_\infty\le\frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

(ii) On pose $f:x\mapsto\left|x-\frac{1}{2}\right|$. Alors, pour tous $u,v\in[0,1]$ on a $|f(u)-f(v)|\le|u-v|$: f est 1–lipschitzienne et donc $\omega(h)\le h$.
Cependant, si $n\ge 1$:

$$\begin{aligned}
\|f-B_n(f)\|_\infty &\ge \left|f\left(\frac{1}{2}\right)-B_n(f)\left(\frac{1}{2}\right)\right|\\
&= \left|B_n(f)\left(\frac{1}{2}\right)\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\right) \text{ où l'on prend les } X_n \text{ de paramètre } \frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2n}\mathbb{E}(|2S_n-n|)\\
&= \frac{1}{2n}\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n\varepsilon_j\right) \text{ où les } \varepsilon_j:=2X_j-1 \text{ sont des variables de Rademacher i.i.d}\\
&\ge \frac{1}{2n\sqrt{e}}\left\|\sum_{j=1}^n\varepsilon_j\right\|_2 \text{ par inégalité de Khintchine}
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(\sum_{j=1}^n\varepsilon_j\right)^2\right) &= \left(\sum_{1\le i\neq j\le n}\mathbb{E}(\varepsilon_i)\mathbb{E}(\varepsilon_j)+\sum_{i=1}^n\mathbb{E}(varepsilon_i^2)\right)\\
&= 0+\sum_{i=1}^n 1
\end{aligned}$$

D'où :

$$\|f-B_n(f)\|_\infty\ge\frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{e}}\ge\frac{1}{2\sqrt{e}}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

D'où le résultat.

Détails supplémentaires :

– Soit $\lambda,h\ge 0$ tels que $\lambda h\in[0,1]$; montrons que $\omega(\lambda h)\le(\lambda+1)\omega(h)$. Il est clair que ω est croissante et que pour tous h,k on a $\omega(h+k)\le\omega(h)+\omega(k)$ donc par récurrence pour tout $k\in\mathbb{N}$ on a $\omega(kh)\le k\omega(h)$. Si on pose $k:=\lceil\lambda\rceil$ on a donc $\omega(\lambda h)\le\omega(kh)\le k\omega(h)\le(\lambda+1)\omega(h)$.

– On trouve le résultat suivant dans [QZ07], p. 248 :

Proposition 2 (Khintchine)
Soit $r_1, \ldots, r_n$ des variables i.i.d de Rademacher (i.e valant ± 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$).
Soit $f \in \langle r_1, \ldots, r_n \rangle_{\mathbb{R}}$.
Alors :

$$\|f\|_2 \leq \sqrt{e}\mathbb{E}(|f|)$$

Démonstration : On a alors $f = \sum_j a_j r_j$ et on peut supposer $\sum_j a_j^2 = \|f\|_2 = 1$. On pose :

$$g := \prod_{j=1}^{n} (1 + i a_j r_j)$$

Alors pour presque tout x :

$$\begin{aligned} |g(x)| &= \prod_{j=1}^{n} \sqrt{1 + a_j^2 r_j^2(x)} \\ &= \prod_{j=1}^{n} \sqrt{1 + a_j^2} \text{ par Pythagore appliqué aux } r_j \\ &\leq \prod_{j=1}^{n} \sqrt{e^{a_j^2}} \\ &= \sqrt{e} \end{aligned}$$

De fait $\|g\|_\infty \leq \sqrt{e}$. De plus pour $j \in [n]$ on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(r_j g) &= \mathbb{E}\left(r_j (1 + i a_j r_j) \prod_{k \neq j} (1 + i a_k r_k) \right) \\ &= \mathbb{E}(r_j(1 + i a_j r_j)) \mathbb{E}\left(\prod_{k \neq j} (1 + i a_k r_k) \right) \\ &= i a_j \prod_{k \neq j} \mathbb{E}\left(1 + i a_k r_k\right) \end{aligned}$$

car $\mathbb{E}(r_j) = 0$ et $\mathbb{E}(r_j^2) = 1 = i a_j$

Or $\mathbb{E}(fg) = \sum_j a_j \mathbb{E}(r_j g)$ d'où $|\mathbb{E}(fg)| = 1$. On conclut en remarquant que :

$$\mathbb{E}(|f|) \geq \frac{|\mathbb{E}(fg)|}{\|g\|_\infty}$$

Références

[QZ07] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Éléments d'analyse pour l'agrégation (3e édition).* Dunod, 2007.