

# Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible

Arnaud GIRAND

17 juin 2012

Référence :

– [Gou08], p. 252 – 254

## Proposition 1 (Théorème d'Abel angulaire)

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et de somme  $f$ .

Soit  $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . On pose :

$$\Delta_{\theta_0} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \varphi \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\varphi}\}$$

On suppose que  $\sum a_n$  converge.

Alors :

$$f(z) \xrightarrow[\substack{z \in \Delta_{\theta_0} \\ z \rightarrow 1}]{\quad} \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

DÉMONSTRATION : On adopte les conventions de notations suivantes :

$$S := \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \forall n \geq 0, S_n := \sum_{k=0}^n a_k, R_n := S - S_n$$

Alors pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$  on a<sup>1</sup>, comme  $a_n = R_{n-1} - R_n$  :

$$\begin{aligned} \forall N \geq 1, \sum_{n=0}^N a_n z^n - S_N &= \sum_{n=1}^N (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^N R_n (z^n - 1) \\ &= R_0(z-1) + \sum_{n=1}^{N-1} R_n z^{n+1} - \sum_{n=1}^{N-1} R_n - \sum_{n=1}^{N-1} R_n z^n + \sum_{n=1}^{N-1} R_n - R_N(z^N - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - z^n) - R_N(z^N - 1) \\ &= (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N(z^N - 1) \end{aligned}$$

Comme  $\sum a_n$  converge,  $R_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$ . De plus  $\left(\sum_{n=0}^N a_n z^n - S_N\right)_N$  converge car  $|z| < 1$  et donc  $\left(\sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n\right)_N$  converge ce qui entraîne, par passage à la limite :

$$f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n \tag{1}$$

---

1. Pour ceux qui voudraient briller en société, ce type de calcul s'appelle une transformée d'Abel.

Fixons à présent  $\varepsilon > 0$ . Alors par convergence de  $(R_n)_n$  vers 0 il existe  $N \geq 1$  tel que  $\forall n \geq N, |R_n| \leq \varepsilon$ . Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$  on a alors, par ( 1 ) :

$$|f(z) - S| \leq |z - 1| \left| \sum_{n=0}^N R_n z^n \right| + \varepsilon |z - 1| \sum_{n=N+1}^{\infty} |z|^n \quad (2)$$

$$\leq |z - 1| \sum_{n=0}^N |R_n| + \varepsilon \frac{|z - 1|}{1 - |z|} \quad (3)$$

Soit à présent  $z \in \Delta_{\theta_0}$  : alors il existe  $\rho > 0$  et  $\varphi \in [-\theta_0, \theta_0]$  tels que  $z = 1 - \rho e^{i\varphi}$  et donc  $|z|^2 = 1 - 2\rho \cos(\varphi) + \rho^2$ .

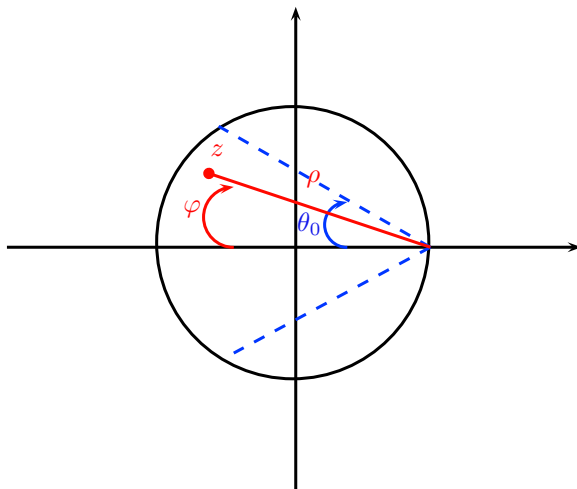


FIGURE 1 – Coordonnées dans  $\Delta_{\theta_0}$ .

Si on suppose  $\rho \leq \cos(\theta_0)$  (ce qui a un sens puisque notre intention est de faire tendre  $z$  vers 1 dans  $\Delta_{\theta_0}$  alors :

$$\begin{aligned} \frac{|z - 1|}{1 - |z|} &= \frac{|z - 1|}{1 - |z|^2} (1 + |z|) \\ &= \frac{\rho}{2\rho \cos(\varphi) - \rho} (1 + |z|) \\ &\leq \frac{2}{2 \cos(\varphi) - \rho} \\ &\leq \frac{2}{2 \cos(\theta_0) - \cos(\theta_0)} \text{ car } \cos(\varphi) \geq \cos(\theta_0) \\ &= \frac{2}{\cos(\theta_0)} \end{aligned}$$

Finalement, si on se donne  $\alpha_N > 0$  tel que  $\alpha_N \sum_{n=0}^N |R_n| < \varepsilon$  et  $z \in \Delta_{\theta_0}$  tel que  $|z - 1| \leq \min(\alpha_N, \cos(\theta_0))$  on a, par ( 3 ) :

$$|f(z) - S| \leq \varepsilon + \varepsilon \frac{2}{\cos(\theta_0)}$$

D'où le résultat.

On poursuit ce développement avec une "semi-réciproque" du théorème d'Abel angulaire :

**Proposition 2 (Théorème taubérien faible)**

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence 1 et de somme  $f$ .

On suppose que :

$$- \exists S \in \mathbb{C}, \quad f(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1]{x \in (-1, 1)} S;$$

$$- a_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Alors la série  $\sum a_n$  converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$$

DÉMONSTRATION : On adopte la notation suivante :

$$\forall n \geq 0, S_n := \sum_{k=0}^n a_k$$

Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in (0, 1)$  :

$$S_n - f(x) = \sum_{k=1}^n a_k(1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$$

Or :

$$\forall k \geq 1, (1 - x^k) = (1 - x) \sum_{i=0}^{k-1} x^i \leq (1 - x)k \text{ car } x \leq 1$$

De fait<sup>2</sup>, la suite  $(ka_k)_k$  étant bornée car  $a_k = o\left(\frac{1}{k}\right)$ , on a :

$$|S_n - f(x)| \leq (1 - x) \sum_{k=1}^n k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k}{n} |a_k| x^k \quad (4)$$

$$\leq (1 - x)Mn + \frac{1}{n} \frac{1}{(1 - x)} \sup_{k > n} (k|a_k|) \text{ où } M := \sup_{k \geq 1} (k|a_k|) \quad (5)$$

Soit  $0 < \varepsilon < 1$  : alors d'après ( 5 ) :

$$\forall n \geq 1, \left| S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| \leq M\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \sup_{k > n} (k|a_k|)$$

La suite  $(ka_k)$  convergeant vers 0 il existe  $N_0 \geq 1$  tel que  $\sup_{k > N_0} (k|a_k|) < \varepsilon$ . Ainsi :

$$\forall n \geq N_0, \left| S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| \leq M\varepsilon + \varepsilon \quad (6)$$

Or  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1]{x \in (-1, 1)} S$  donc il existe  $N_1 \geq 1$  tel que :

$$\forall n \geq N_1, \left| f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) - S \right| \leq \varepsilon \quad (7)$$

En combinant ( 6 ) et ( 7 ) on obtient :

$$\forall n \geq \max(N_0, N_1), |S_n - S| \leq \left| S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| + \left| f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) - S \right| \leq \varepsilon(M + 2)$$

D'où le résultat.

### Détails supplémentaires :

- La réciproque du théorème d'Abel angulaire est fautive. En effet, la série  $\sum (-1)^n z^n$  converge normalement sur le disque unité ouvert vers  $z \mapsto \frac{1}{1+z}$  et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \xrightarrow[z \rightarrow 1, |z| < 1]{} \frac{1}{2} = \lim_{z \rightarrow 1, |z| < 1} \frac{1}{1+z}$$

Cependant, la série  $\sum (-1)^n$  n'est pas convergente.

## Références

[Gou08] Xavier Gourdon. *Analyse (2e édition)*. Ellipses, 2008.

2. La première majoration dans la seconde somme provenant du fait que si  $k \geq n + 1$  alors (!)  $\frac{k}{n} \geq 1$ .