Théorème de Von Neumann

Arnaud Girand

20 août 2013

Références :
- [GT98], p. 83–84

Soit G un sous–groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$. On pose :

$$\mathcal{L}_G := \{m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, \forall t \in \mathbb{R},\, e^{tm} \in G\}$$

Alors $\mathcal{L}_G$ est un s–e.v de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (cf. infra) donc y admet un supplémentaire, soit M.

Lemme 1
Il n'existe aucune suite $(m_k)_k \in (M \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle que $\forall k \geq 0,\ e^{m_k} \in G$.

Démonstration : Si il existe une suite $(m_k)_k \in (M\setminus\{0\})^{\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle que $\forall k \geq 0, e^{m_k} \in G$, alors on peut la suite définie $\varepsilon_k := \dfrac{m_k}{\|m_k\|}$ est incluse dans un compact donc (quitte à extraire) converge vers un élément ε unitaire de M.

Soit $t \in \mathbb{R}$; on remarque que :

$$e^{t\varepsilon} = \lim_{k\to\infty} e^{t\varepsilon_k}$$

Or pour tout $k \geq 0$, on peut écrire $\dfrac{t}{\|m_k\|} = \lambda_k + \mu_k$ où $\lambda_k \in \mathbb{Z}$ et $|\mu_k| \leq \frac{1}{2}$. On a alors :

$$e^{t\varepsilon_k} = \underbrace{e^{\lambda_k m_k}}_{\in G}\ \underbrace{e^{\mu_k m_k}}_{\xrightarrow[k\to\infty]{} 1}$$

De fait, comme G est fermé, $e^{t\varepsilon} \in G$, ce qui est absurde car alors $\varepsilon \in \mathcal{L}_G \cap M \setminus \{0\}$.

Proposition 1 (Von Neumann)
Tout sous–groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous–variété de $GL_n(\mathbb{R})$.

Démonstration : Soit G un tel groupe. Commençons par remarquer que comme $h \mapsto gh$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour tout $g \in G$, il nous suffit de montrer qu'il existe un voisinage de I_n dans G difféomorphe à un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie.

- Supposons $\mathcal{L}_G = \{0\}$. Alors, d'après le lemme 1, 0 est un point isolé de $L(G)$ (cf. infra) donc que I_n est isolé dans G. Par structure ($\mathcal{C}^\infty$) de groupe, G est donc discret (ce qui implique que c'est une sous–variété).
- Supposons à présent $\mathcal{L}(G) \neq \{0\}$. L'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on a $d\exp(0) = \mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \neq 0$. De fait, par inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $W := \exp(U)$ soit un ouvert de $GL_n(\mathbb{R})$ et que $\exp : U \to W$ soit un $\mathcal{C}^\infty$–difféomorphisme ; et donc, quitte à restreindre U, $\exp : U \cap \mathcal{L}_G \to W \cap G$ l'est également. On a donc un difféomorphisme entre un voisinage de I_n dans G et un ouvert de $\mathcal{L}_G$ d'où le résultat.

Détails supplémentaires :
- *Logarithme matriciel.* Si $m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $\|m\| < 1$ on peut définir de façon $\mathcal{C}^\infty$ un "logarithme" de $I_n + m$ comme suit :

$$L(I_n + m) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{m^{k+1}}{k+1}$$

On a alors $e^{L(I_n+m)} = I_n + m$.

– $\mathcal{L}_G$ *est un s–e.v de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le seul point technique est la stabilité additive qui découle de la relation suivante :

$$\forall a, b \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \left(e^{a/k}e^{b/k}\right)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} e^{a+b} \tag{1}$$

Cette relation découle elle–même du fait que comme $e^{a/k}e^{b/k} == I_n + \frac{a+b}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)$ on a :

$$\begin{aligned}\left(e^{a/k}e^{b/k}\right)^k &= e^{kL\left(e^{a/k}e^{b/k}\right)} \\ &= e^{kL\left(I_n + \frac{a+b}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)} \\ &\xrightarrow[k\to\infty]{} e^{a+b} \text{ car } L(I_n + m) = m + o(m)\end{aligned}$$

Références

[GT98] Stéphane Gonnord and Nicolas Tosel. *Calcul différentiel.* Ellipses, 1998.