Théorème des extrema liés

Arnaud GIRAND

17 juin 2012

Référence :
- [Gou08], p. 317 et 327

Proposition 1 (Extrema liés)
Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.
Soient $g_1, \ldots, g_r \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$.
On considère l'ensemble suivant :

$$\Gamma := \{x \in \mathcal{U} \,|\, \forall i \in [r],\, g_i(x) = 0\}$$

On suppose que :
- *$f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$;*
- *la famille $(dg_i(a))_{1\leq i\leq r}$ est libre dans $(\mathbb{R}^n)^*$.*

Alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ (appelés multiplicateurs de Lagrange) tels que :

$$df(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i dg_i(a)$$

DÉMONSTRATION : On pose $s := n - r$ et on identifie $\mathbb{R}^n$ au produit cartésien $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$. On utilisera de fait la notation $(x, y) = (x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_r)$ pour les éléments de $\mathbb{R}^n$. Posons également $(\alpha, \beta) := a$ (via l'identification précitée). On rappelle que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\, \forall i \in [r],\, dg_i(a)(h) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial g_i}{x_j}(a)h + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial g_i}{y_j}(a)h$$

Comme la famille $(dg_i(a))_{1\leq i\leq r}$ est libre, on a donc :

$$\operatorname{rg}(M) = r, \text{ où } M := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \ldots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$$

Comme le rang de M est la taille de sa plus petite matrice sous–matrice carrée inversible, on peut supposer, quitte à renuméroter les variables [1] que :

$$\det\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a)\right)_{i,j\in[r]} \neq 0$$

Ce qui peut se reformuler, en posant $g := (g_1, \ldots, g_r)$ par :

$$D_y g(a) \text{ est inversible}$$

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites à g au voisinage de $a = (\alpha, \beta)$, obtenant de facto l'existence de deux voisinages ouverts $\mathcal{U}' \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^s}(\alpha)$ et $\Omega \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^r}(\beta)$ et d'une application $\varphi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_r) : \mathcal{U}' \to \mathbb{R}^r$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\begin{cases} g(x, y) = 0 \\ x \in \mathcal{U}' \\ y \in \Omega \end{cases} \Leftrightarrow y = \varphi(x) \tag{1}$$

1. Un peu de foi que diable !

En d'autres termes, les éléments de $\Gamma \cap (\mathcal{U}' \times \Omega)$ sont de la forme $(x, \varphi(x))$. En particulier, on a nécessairement $\beta = \varphi(\alpha)$. Posons à présent :

$$\begin{aligned} h : \mathcal{U}' &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x, \varphi(x)) \end{aligned}$$

Comme $h(\alpha) = f(a)$ et que $\forall x \in \mathcal{U}'$, $(x, \varphi(x)) \in \Gamma$, h admet un extremum local en α (car f admet un extremum local sur Γ en a). De fait :

$$\begin{aligned} \forall i \in [s],\ 0 = \frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) &= \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \psi)(\alpha) \text{ où } \psi := (\psi_1, \dots, \psi_n) : x \mapsto (x, \varphi(x)) \text{ (i.e } \psi = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^s}, \varphi)) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\psi(\alpha)) \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(\alpha) + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial y_j}(\psi(\alpha)) \frac{\partial \psi_{s+j}}{\partial x_i}(\alpha) \end{aligned}$$

En remarquant que $\forall j \in [s]$, $\dfrac{\partial \psi_j}{\partial x_i} = \delta_{i,j}$, que $\forall j \in [r]$, $\dfrac{\partial \psi_{s+j}}{\partial x_i} = \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$ et que $a = \psi(\alpha)$ on obtient :

$$\forall i \in [s], \quad \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \tag{2}$$

De plus, $g \circ \psi$ est nulle sur $\mathcal{U}'$ donc pour tout $k \in [n]$ c'est également le cas pour $g_k \circ \psi$, ergo (par un calcul similaire) :

$$\forall i \in [s], \quad 0 = \frac{\partial g_k \circ \psi}{\partial x_i}(\alpha) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(a) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha) + \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a) = 0 \tag{3}$$

On se donne la matrice suivante :

$$A := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial f}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial f}{\partial y_r}(a) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r+1,n}(\mathbb{R})$$

D'après les relation (2) et (3) les s premières colonnes de A sont combinaisons linéaires de ses r dernières, ergo $\mathrm{rg}(A) \leq r$. Comme $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$, on en déduit que les $r+1$ premières lignes de A sont liées, i.e qu'il existe $\mu_0, \dots, \mu_r \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que :

$$\mu_0 df(a) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i dg_i(a) = 0$$

Or $(dg_i(a))_{i \in [r]}$ est libre donc $\mu_0 \neq 0$ (car sinon tous les μ_i devraient l'être). On obtient alors le résultat en posant $\lambda_0 := 1$ et $\forall i \in [r]$, $\lambda_i := -\dfrac{\mu_i}{\mu_0}$.

Détails supplémentaires :

- Comme la famille $(dg_i(a))_{1 \leq i \leq r}$ est libre dans $(\mathbb{R}^n)^*$, il y a unicité des multiplicateurs de Lagrange.

Références

[Gou08] Xavier Gourdon. *Analyse (2e édition).* Ellipses, 2008.