Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$

Arnaud Girand

5 juillet 2012

Référence :
- [Pey04], p. 228–230

Commençons par dénombrer les classes de conjugaisons de $\mathfrak{S}_4$ qui, comme chacun sait, son caractérisées par le profil :
- l'identité ( ) est seule dans sa classe ;
- les permutations, telle (1 2), forment une classe de cardinal 6 ;
- il y a 8 3–cycles, dont l'un est (1 2 3) ;
- les 4–cycles constituent une classe de 6 éléments comprenant (1 2 3 4) ;
- les doubles permutations [1], telle (1 2)(3 4), sont 3.

Attaquons nous à présent aux caractères.
- On connaît deux représentations de degré 1 de $\mathfrak{S}_4$: la représentation triviale, de caractère χ_1, et la signature, de caractère χ_ε :

	( )	(1 2)	(1 2 3)	(1 2 3 4)	(1 2)(3 4)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1

- Considérons la représentation par permutation de $\mathfrak{S}_4$, définie par :

$$\begin{aligned} \rho_p : \mathfrak{S}_4 &\to GL_4(\mathbb{C}) \\ \sigma &\mapsto (\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leq i,j\leq n} \end{aligned}$$

Cette représentation (de degré 4) n'est pas irréductible ; en effet, la droite $\mathcal{D} := \langle(1,1,1,1)\rangle$ y est $\mathfrak{S}_4$–stable et admet pour supplémentaire stable l'hyperplan $\mathcal{H} := \{\underline{x} \in \mathbb{C}^4 \mid x_1+x_2+x_3+x_4 = 0\}$. ρ_p induit sur $\mathcal{D}_h$ la représentation triviale et sur $\mathcal{H}$ une certaine représentation, que nous noterons ρ_s. On a alors, avec notations évidentes, $\chi_p = \chi_1 + \chi_s$ et comme pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ $\chi_p(\sigma)$ est égal aux nombres de points fixes de σ on a :

$$\begin{aligned} |\mathfrak{S}_4|\langle\chi_s,\chi_s\rangle &= \chi_s((\ ))^2 + 6\chi_s((1\,2))^2 + 8\chi_s((1\,2\,3))^2 + 6\chi_s((1\,2\,3\,4))^2 + 3\chi_s((1\,2)(3\,4))^2 \\ &= 3^2 + 6\times 1^2 + 8\times 0^2 + 6\times(-1)^2 + 3\times(-1)^2 \\ &= 24 \end{aligned}$$

Donc $\langle\chi_s,\chi_s\rangle = 1$: χ_s est irréductible, ce qui nous permet d'ajouter la ligne suivante à notre table :

	( )	(1 2)	(1 2 3)	(1 2 3 4)	(1 2)(3 4)
χ_s	3	1	0	-1	-1

- On sait qu'il existe autant de classes de représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_4$ que de classes de conjugaison dans ce dernier, donc il nous reste deux représentations à trouver, de dimensions n_4, n_5. De plus on sait que l'on doit avoir $n_4^2 + n_5^2 = 24 - (1^2+1^2+3^2) = 13$ d'où $n_4 = 2$ et $n_5 = 3$.
- Avec notations évidentes, posons $W := \mathcal{L}(V_s, V_\varepsilon)$. Cette représentation est de dimension $3\times 1 = 3$ et son caractère est $\chi_W = \chi_s\overline{\chi_\varepsilon}$. Un calcul rapide montre alors que $\langle\chi_W,\chi_W\rangle = 1$ et donc χ_W est irréductible ; on peut donc ajouter à notre table :

	( )	(1 2)	(1 2 3)	(1 2 3 4)	(1 2)(3 4)
χ_W	3	-1	0	1	-1

- Le dernier caractère peut être déduit de la relation d'orthogonalité des colonne :

	( )	(1 2)	(1 2 3)	(1 2 3 4)	(1 2)(3 4)
$\chi_{W'}$	2	0	-1	0	2

1. À supports disjoints !

Au final on a la table de caractères suivante :

	( )	(1 2)	(1 2 3)	(1 2 3 4)	(1 2)(3 4)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
$\chi_{W'}$	2	0	-1	0	2
χ_s	3	1	0	-1	-1
χ_W	3	-1	0	1	-1

Détails supplémentaires :

– *Orthogonalité des colonnes.* Si $((\chi_i, n_i))_{i\in[p]}$ sont des couples (caractère, dimension) décrivant exactement l'ensemble des classes de représentations irréductibles d'un groupe G on :

$$\forall s \in G \setminus \{e_G\}, \qquad \sum_{i=1}^{p} n_i \chi_i(s) = 0$$

– Alternativement (c'est d'ailleurs plutôt conseillé), on peut construire χ_W à l'aide du "dictionnaire" $\mathfrak{S}_4 \cong \mathrm{Isom}^+(C_6)$. Pour trouver les entrées de la table de caractères il suffit alors de prendre les traces des rotations correspondantes.

Références

[Pey04] Gabriel Peyré. *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier.* Ellipses, 2004.