Théorème de Stone–Weierstrass

Arnaud Girand

17 juin 2012

Référence :
- [QZ95], p. 342–345

Proposition 1 (Stone–Weierstrass)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Soit $K \subset\subset \Omega$.
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$.
Alors il existe une suite de polynômes[1] *convergeant uniformément vers f sur K.*

Démonstration : On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne canonique $\|.\|$. Soit $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ égale à 1 sur K. Dans toute la suite on considérera que la fonction θf est définie sur $\mathbb{R}^n$ entier en la prolongeant par 0, le prolongement restant clairement continu. Soit $K' := K - \operatorname{supp}(\theta)$. On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned}\rho : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} e^{-\|x\|^2}\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \rho &= \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n e^{-x_i^2} dx_1 \dots dx_n\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x_2^2} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-x_n^2} dx_n \dots dx_1 \text{ par Fubini}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} (\sqrt{\pi})^n\\ &= 1\end{aligned}$$

Pour $m \in \mathbb{N}$ on définit également deux applications sur $\mathbb{R}^n$:

$$\rho_m : x \mapsto m^n \rho(mx) \text{ et } P_m : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \sum_{j=0}^{m^3-1} \frac{(-1)^j \|x\|^{2j}}{j!}$$

Soient $z \in K'$ et $m \geq 0$. Alors :

$$\begin{aligned}m^{n+1}(\rho(mz) - P_m(mz)) &= \left(e^{-\|mz\|^2} - \sum_{j=0}^{m^3-1} \frac{(-1)^j \|mz\|^{2j}}{j!} \right)\\ &= \frac{m^{n+1}}{\sqrt{\pi^n}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j m^{2j} \|z\|^{2j}}{j!} - \sum_{j=0}^{m^3-1} \frac{(-1)^j m^{2j} \|z\|^{2j}}{j!} \right)\\ &= \frac{m^{n+1}}{\sqrt{\pi^n}} \sum_{j=m^3}^{\infty} \frac{(-1)^j m^{2j} \|z\|^{2j}}{j!}\end{aligned}$$

1. À n indéterminées.

Comme K' est compact (car K et suppθ le sont), il est borné par un certain $R > 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} m^{n+1}|\rho(mz) - P_m(mz)| &\leq \frac{m^{n+1}}{\sqrt{\pi^n}} \sum_{j=m^3}^{\infty} \frac{m^{2j}\|z\|^{2j}}{j!} \\ &\leq \frac{m^{n+1}}{\sqrt{\pi^n}} \sum_{j=m^3}^{\infty} \frac{(Rm)^{2j}}{j!} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \sum_{j=m^3}^{\infty} \frac{R^{2j}}{j!} j^{2j/3} j^{(n+1)/3} \text{ car } \forall j \geq m^3,\ m \leq j^{1/3} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \sum_{j=m^3}^{\infty} \frac{R^{2j}}{j!} j^{2j/3+(n+1)/3} \end{aligned}$$

Posons, pour $j \geq 0$, $\alpha_j := \dfrac{R^{2j}}{j!} j^{2/3+(n+1)/3}$. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} &= \frac{R^{2j+2}(j+1)^{2(j+1)/3+(n+1)/3} j!}{R^{2j} j^{2j/3+(n+1)/3} (j+1)!} \\ &= R^2 \left(1 + \frac{1}{j}\right)^{\frac{2}{3}j} \left(1 + \frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{3}(n+1)} \frac{1}{j+1} \\ &\xrightarrow[j\to\infty]{} 0 \text{ car } \left(1 + \frac{1}{j}\right)^{\frac{2}{3}j} = e^{\frac{2}{3}j\ln\left(1+\frac{1}{j}\right)} \sim e^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Par règle de d'Alembert, la série $\sigma\alpha_j$ converge (absolument), donc son reste converge vers 0. De fait $m^{n+1}|\rho(mz) - P_m(mz)| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ et donc il existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall m \geq m_0,\ \forall z \in K', \quad m^{n+1}|\rho(mz) - P_m(mz)| \leq 1, \text{ donc } m^n|\rho(mz) - P_m(mz)| \leq \frac{1}{m}$$

In fine, par minimalité du supremum :

$$\forall m \geq m_0, \qquad \sup_{z\in K'} \left(m^n|\rho(mz) - P_m(mz)|\right) \leq \frac{1}{m} \tag{1}$$

Soient $m \geq m_0$ et $x \in K$. Alors :

$$\begin{aligned} (\rho(m.) - P_m(m.)) * \theta f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\rho(m(x-y)) - P_m(m(x-y)))\theta(y)f(y)dy \\ &= \int_{\text{supp}\theta} (\rho(m(x-y)) - P_m(m(x-y)))\theta(y)f(y)dy \\ &= \int_{K'} (\rho(my) - P_m(my))\theta(x-y)f(x-y)dy \text{ via } y \mapsto x-y \text{ et car } K' = K - \text{supp}(\theta) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\rho(my) - P_m(my))1_{K'}(y)\theta(x-y)f(x-y)dy \\ &= (\rho(m.) - P_m(m.))1_{K'} * \theta f(x) \text{ par commutativité de la convolution} \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} m^n|(\rho(m.) - P_m(m.))1_{K'} * \theta f(x)| &\leq m^n\|(\rho(m.) - P_m(m.))1_{K'}\|_\infty \|\theta f\|_1 \\ &\leq \frac{1}{m}\|\theta f\|_1 \text{ par (1)} \end{aligned}$$

Ergo :

$$\forall m \geq m_0, \qquad \sup_{x\in K} \left(m^n \left|\int_{\mathbb{R}^n} (\rho(m(x-y)) - P_m(m(x-y)))\theta(y)f(y)dy\right|\right) \leq \frac{1}{m}\|\theta f\|_1 \tag{2}$$

On fixe à nouveau $m \geq m_0$ et $x \in K$. On a :

$$\begin{aligned}
\rho_m * \theta f(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} m^n \rho(mz)\theta(x-z)f(x-z)dz - f(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \rho(z)\theta\left(x - \frac{z}{m}\right) f\left(x - \frac{z}{m}\right) dz - f(x) \text{ via le changement de variable} z \mapsto \frac{z}{m} \text{ de jacobien } \frac{1}{m^n} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \rho(z)(\theta f)\left(x - \frac{z}{m}\right) dz - \int_{\mathbb{R}^n} \rho(z)\theta(x)f(x)dz \text{ car } \int_{\mathbb{R}^n} \rho = 1 \text{ et } \theta(x) = 1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \rho(z)\left((\theta f)\left(x - \frac{z}{m}\right) - (\theta f)(x)\right) dz
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $R_0 > 0$ choisi tel que :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi^n}} e^{-\frac{1}{2}R_0^2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\|y\|^2} dy\right) 2 \sup_{x\in\Omega} |\theta f| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

Notez que $\sup_{x\in\Omega} |\theta f| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\theta f|$. Alors :

–

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\|z\|\geq R_0} \rho(z)\left((\theta f)\left(x - \frac{z}{m}\right) - (\theta f)(x)\right) dz\right| &\leq 2\sup_{x\in\Omega} |\theta f| \int_{\|z\|\geq R_0} \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} e^{-\|z\|^2} dz \\
&= 2\sup_{x\in\Omega} |\theta f| \int_{\|z\|\geq R_0} \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} e^{-\frac{1}{2}\|z\|^2} e^{-\frac{1}{2}\|z\|^2} dz \\
&\leq e^{-\frac{1}{2}R_0^2} 2\sup_{x\in\Omega} |\theta f| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} e^{-\frac{1}{2}\|z\|^2} dz \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned}$$

– θf est continue à support compact donc uniformément continue (théorème de Heine). De fait, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, x' \in \text{supp}(\theta)$ tels que $\|x - x\|' \leq \delta$ alors $|\theta f(x) - \theta f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Ainsi, si $m \in \mathbb{N}$ est tel que $\frac{R_0}{m} \leq \delta$ on a :

$$\forall z \in \overline{\mathcal{B}}(0, R_0), \quad \left\|\left(x - \frac{z}{m}\right) - x\right\| = \frac{\|z\|}{m} \leq \delta$$

Ergo :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\|z\|\leq R_0} \rho(z)\left((\theta f)\left(x - \frac{z}{m}\right) - (\theta f)(x)\right) dz\right| &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_{\|z\|\leq R_0} e^{-\|z\|^2} \left|\theta f\left(x - \frac{z}{m}\right) - \theta f(x)\right| dz \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4} \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_{\|z\|\leq R_0} e^{-\|z\|^2} dz \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned}$$

In fine, si on pose $m_1 := \left\lfloor \frac{R_0}{\delta} \right\rfloor$ on a :

$$\forall m \geq m_1, \qquad \sup_{x\in K} |\rho_m * \theta f(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

Ainsi, en combinant (2) et (3) on obtient que :

$$\begin{aligned}
\forall m \geq \max(m_0, m_1), \quad \sup_{x\in K} |m^n P(m.) * \theta f(x) - f(x)| &\leq \sup_{x\in K} |m^n(\rho(m.) - P(m.)) * \theta f(x)| + \sup_{x\in K} |\rho_m * \theta f(x) - f(x)| \\
&\leq \frac{1}{m}\|\theta f\|_1 + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Et donc la suite de polynômes $(Q_m)_m := (m^n P_m(m.) * \theta f)_m$ converge uniformément vers f sur K.

Détails supplémentaires :

– *La convolée d'un polynôme avec une fonction intégrable est un polynôme.* Nous nous contenterons [2] ici de la preuve en dimension 1. Si $f \in L^1(K)$ (avec $K \subset\subset \mathbb{R}$) et $P := \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad P * f(x) &= \int_K \sum_{k=0}^{d} a_k (x-y)^k f(y)dy \\ &= \int_K \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{j=0}^{k} C_k^j x^j y^{k-j} f(y)dy \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{j=0}^{k} C_k^j \left(\int_K y^{k-j} f(y)dy \right) x^j \\ &= \sum_{j=0}^{d} \sum_{k=j}^{d} a_k C_k^j \left(\int_K y^{k-j} f(y)dy \right) x^j\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Références

[QZ95] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Éléments d'analyse pour l'agrégation.* Masson, 1995.

2. Les amateurs de multi–indices trouverons certainement très distrayant d'écrire ces calculs en dimension quelconque. Penser toutefois à remplacer $P \in \mathbb{R}[X]$ par $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$.