Ellipsoïde de John–Loewner

Arnaud Girand

5 juillet 2012

Référence :
- [FGN10], p. 229–231

Proposition 1
Soit $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide.
Alors il existe un unique ellipsoïde de volume minimal contenant K.

Démonstration : On sait qu'un ellipsoïde (plein) centré en l'origine admet une équation de la forme $q(x) \leq 1$, avec $q \in Q_{++}$. De fait, on peut associer à toute forme quadratique définie positive q un ellipsoïde $\mathcal{E}_q := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, q(x) \leq 1\}$.

Soit donc $q \in Q_{++}$. Alors, par théorème spectral, il existe une b.o.n $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que si l'on pose $a_i = q(e_i)$ on ait :

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathbb{R}^n,\ q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$$

Si on note V_q le volume de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_q$ on a alors :

$$V_q = \int_{a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2 \leq 1} dx_1 \ldots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} \chi_{\{a_i x_i^2 \leq 1\}} dx_1 \ldots dx_n$$

Par le changement de variable ($\mathcal{C}^1$–difféomorphisme) $\varphi : x \mapsto (\frac{x_1}{\sqrt{a_1}}, \ldots, \frac{x_n}{\sqrt{a_n}})$ on a :

$$V_q = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} \chi_{\{x_i^2 \leq 1\}} |\mathrm{Jac}(\varphi)| dx_1 \ldots dx_n = \frac{1}{\sqrt{a_1 \ldots a_n}} \int_{x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1} dx_1 \ldots dx_n$$

Remarquons de plus que si $\mathcal{B}_1$ est une b.o.n de $\mathbb{R}^n$ quelconque et si on note $S := \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_1}(q)$ on a, par changement de base pour les formes quadratiques, qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$S = P \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(q)^t P = P \mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)^t P$$

Comme $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ sont orthonormées on a de plus que $P \in O_n(\mathbb{R})$. De facto, $D(q) := \det(S) = a_1 \ldots a_n$ ne dépend que de q. Si on note V_0 le volume de la boule unité (euclidienne) de $\mathbb{R}^n$ on a finalement :

$$V_q = \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}}$$

On se ramène donc à montrer qu'il existe un unique $q \in Q_{++}$ tel que :

(i) $D(q)$ soit maximal ;

(ii) $\forall x \in K,\ q(x) \leq 1$.

On munit l'espace vectoriel Q de la norme $N : q \mapsto \sup_{\|x\| \leq 1} |q(x)|$ et on cherche à maximiser D sur l'ensemble suivant :

$$A := \{q \in Q_+ \,|\, \forall x \in K,\ q(x) \leq 1\}$$

Démontrons que A est une partie convexe compacte non vide de Q.

- K est compact donc borné par un certain $M > 0$. De fait, la forme quadratique $q : x \mapsto \dfrac{\|x\|^2}{M^2}$ est dans A donc $A \neq \emptyset$.

- Soient $q, q' \in A$ et soit $\lambda \in [0,1]$. Alors il est clair que $\lambda q + (1-\lambda)q' \in Q_+$. De plus, si $x \in K$ on a :
$$\lambda q(x) + (1-\lambda)q'(x) \leq \lambda + (1-\lambda) = 1$$
Donc A est convexe.
- Soit $(q_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant dans Q vers une forme quadratique q. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :
$$\forall n \geq 0,\ |q_n(x) - q(x)| \leq N(q_n - q)\|x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
Donc par passages à la limite $q \in Q_+$ (considérer $q_n(x) \geq 0$) et $\forall x \in K$, $q(x) \leq 1$. Donc $q \in A$ donc A est fermée.
De plus, comme K est d'intérieur non vide, il existe $a \in K$ et $r > 0$ tels que $\overline{\mathcal{B}}(a,r) \subset K$. Ainsi, si $q \in A$ et $x \in \overline{\mathcal{B}}(0,r)$ alors $q(a+x) \leq 1$. De plus, $q(-a) = q(a) \leq 1$. Ainsi, par inégalité de Minkowski :
$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{q(x+a-a)} \leq \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(-a)} \leq 2$$
Ainsi $q(x) \leq 4$. In fine, si $x \in \overline{\mathcal{B}}(0,1)$ on a :
$$0 \leq q(x) = \frac{1}{r^2}q(rx) \leq \frac{4}{r^2}$$
Donc $N(q) \leq \dfrac{4}{r^2}$. A est un donc un sous–ensemble fermé et borné de l'espace vectoriel de dimension finie Q : il est compact.

Le déterminant étant continu, l'application $D : q \mapsto D(q)$ l'est également. Comme A est compact, D y est bornée et atteint son maximum en un certain $q_0 \in A$. De plus, comme $x \mapsto \dfrac{\|x\|^2}{M^2} \in A$, on a nécessairement $D(q_0) > 0$ et donc $q_0 \in Q_{++}$. D'où l'existence de l'ellipsoïde recherché (il suffit de prendre $\mathcal{E}_{q_0}$).

Supposons à présent qu'il existe $q \in A$ distincte de q_0 telle $D(q) = D(q_0)$. Posons $S := \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c}(q)$ et $S_0 := \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c}(q_0)$, où $\mathcal{B}_c$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme A est convexe, $\dfrac{q+q_0}{2} \in A$ et par log–concavité du déterminant sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$ on a :
$$D\left(\frac{q+q_0}{2}\right) = \det\left(\frac{1}{2}(S+S_0)\right) > \sqrt{\det(S)}\sqrt{\det(S_0)} = \det(S_0) \geq D(q_0)$$
Ce qui contredit la maximalité de $D(q_0)$ et termine donc la preuve.

Détails supplémentaires :

- *Log–concavité du déterminant sur* $S_n^{++}(\mathbb{R})$. On se propose de montrer que l'application ϕ suivante est logarithmiquement concave, i.e que $\ln \circ \phi$ est concave (cf. [FGN10], p. 222–223) :
$$\begin{aligned} \phi : S_n^{++}(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det(A) \end{aligned}$$
Cela revient donc à montrer que :
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \text{ tels que } \alpha + \beta = 1,\ \forall A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R}), \quad \det(\alpha A + \beta B) \geq \det(A)^\alpha \det(B)^\beta$$
Par théorème de pseudo–réduction simultanée des formes quadratiques, on sait qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$. Comme B est définie positive, on a de plus que les λ_i sont strictement positifs. De plus :
$$\begin{cases} \det(A)^\alpha \det(B)^\beta &= (\det(P)^2)^\alpha (\det(P)^2 \det(D))^\beta &= \det(P)^2 \det(D)^\beta \\ \det(\alpha A + \beta B) &= \det(P)^2 \det(\alpha I_n + \beta D) & \end{cases} \tag{1}$$
Le logarithme étant concave, on a également :
$$\forall i \in [n],\ \ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geq \alpha \ln(1) + \beta \ln(\lambda_i) = \beta \ln(\lambda_i)$$

En sommant ces inégalités on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geq \beta \sum_{i=1}^{n} \ln(\lambda_i)$$

I.e :

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n}(\alpha + \beta\lambda_i)\right) \geq \ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^{\beta}\right)$$

Donc par croissance du logarithme :

$$\underbrace{\prod_{i=1}^{n}(\alpha + \beta\lambda_i)}_{=\det(\alpha I_n + \beta D)} \geq \left(\underbrace{\prod_{i=1}^{n}\lambda_i}_{=\det(D)}\right)^{\beta}$$

Ce qui conclut la preuve (utiliser (1)).

- On rappelle qu'il y a une correspondance bijective entre $S_n(\mathbb{R})$ et l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ via $A \mapsto ((x, y) \mapsto \langle Ax, y\rangle)$.
- *Un ellipsoïde (plein) centré en l'origine admet une équation de la forme $q(x) \leq 1$, avec $q \in Q_{++}$.* En effet, un tel ellipsoïde admet dans un repère ad hoc une équation de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1$$

Il suffit alors de remarquer que $q : x \mapsto \sum \frac{x_i^2}{R^2 a_i^2} \in Q_{++}$.

Références

[FGN10] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X - ENS, Algèbre 3*. Cassini, 2010.