Sous groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

Arnaud Girand

17 juin 2012

Référence :
- [Ale99], p. 141 et 160–162

Prérequis :
- théorème de Caratheodory.

Lemme 1
Soit V un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme euclidienne $\|.\|$.
Soit K un compact convexe de V.
Soit $\mathcal{G}$ un sous–groupe compact de $GL(V)$ tel que :

$$\forall u \in \mathcal{G}, \quad u(K) \subset K$$

Alors il existe $a \in K$ tel que :

$$\forall u \in \mathcal{G}, \quad u(a) = a$$

Démonstration : Commençons par montrer que si $v \in \mathcal{L}(V)$ vérifie $v(K) \subset K$, alors v admet un point fixe sur K. Fixons $x_0 \in K$ et posons pour $k \geq 1$:

$$x_k := \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} v^i(x_0)$$

Comme K est convexe et stable par u il est clair que $\forall k \geq 0$, $x_k \in K$ et donc d'après le théorème de Bolzano–Weierstrass, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_\varphi(k))_k$ converge vers un point $a \in K$. Or :

$$\begin{aligned}
\forall k \geq 0,\ v(x_k) &= v\left(\frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} v^i(x_0)\right) \\
&= \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} v^{i+1}(x_0) \\
&= x_k + \frac{1}{k+1}(v^{k+1}(x_0) - x_0)
\end{aligned}$$

Or $\frac{1}{k+1}(v^{k+1}(x_0) - x_0) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ car $(v^{k+1}(x_0) - x_0)_k$ est bornée par compacité de K et continuité de v donc en passant à la limite on obtient que v $v(a) = a$.

Remarquons ensuite que $\mathcal{G}$ agit naturellement sur V via $u.x := u(x)$. De plus comme $\mathcal{G}$ est compact, l'orbite $\mathcal{G}.x$ d'un élément $x \in V$ sous cette action est compacte ce qui nous permet de définir l'application suivante :

$$\begin{aligned}
\nu : V &\to \mathbb{R}_+ \\
x &\mapsto \max_{u \in \mathcal{G}} \|u(x)\|
\end{aligned}$$

On montre alors que comme $\mathcal{G} \leq GL(V)$ ν est une norme sur V constante sur les orbites sous l'action de $\mathcal{G}$. De plus si on se donne $x, y \in V$ et $u_0 \in \mathcal{G}$ tel que $\nu(x+y) = \|u_0(x+y)\|$. Alors :

$$\begin{aligned}
\nu(x+y) &= \|u_0(x+y)\| \\
&\leq \|u_0(x)\| + \|u_0(y)\| \\
&\leq \nu(x) + \nu(y)
\end{aligned}$$

Si on se place dans le cas d'égalité on a alors $\|u_0(x)+u_0(y)\| = \|u_0(x)\| + \|u_0(y)\|$ et donc il existe $\lambda \geq 0$ tel que $u_0(x) = \lambda u_0(y)$ et donc $x = \lambda y$.

Pour $u \in \mathcal{G}$ on considère à présent l'ensemble suivant :

$$F_u := \{x \in K \,|\, u(x) = x\}$$

Cet ensemble est un fermé non vide de K. De fait, si on suppose que $\cap_{u\in\mathcal{G}} F_u = \emptyset$ alors la propriété de Borel–Lebesgue impose l'existence de $u_1, \ldots, u_p \in K$ tels que $\cap_{i=1}^p F_{u_i} = \emptyset$. Posons alors :

$$v := \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} u_i \in \mathcal{L}(V)$$

Alors, par convexité et $\mathcal{G}$–stabilité de K, $v(K) \subset K$ et donc il existe $a \in K$ tel que $v(a) = a$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\nu(v(a)) &= \nu\left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} u_i(a) \in \mathcal{L}(V)\right) \\
&\leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} \nu(u_i(a)) \\
&= \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} \nu(a) \\
&= \nu(a)
\end{aligned}$$

Les $u_i(a)$ sont donc positivement liés (i.e il existe $a_1, \ldots, a_{p-1} \geq 0$ tels que $u_1(a) = a_1 u_2(a) = \ldots = a_{p-1} u_p(a)$) et comme ils sont de même norme (pour ν) ils sont égaux. On a donc nécessairement $u_i(a) = a$ pour tout $i \in [p]$, ce qui contredit notre hypothèse et conclut la preuve.

Proposition 1
Soit G un sous–groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.
Alors il existe une forme quadratique q définie positive sur $\mathbb{R}^n$ telle que $G \subset \mathcal{O}(q)$

Démonstration : On munit G d'une nouvelle structure de groupe $(G, \diamond)$ définie comme suit : $\forall A, B \in G,\ A \diamond B := BA$ et on considère l'application suivante :

$$\begin{aligned}
\rho : (G, \diamond) &\to GL(S_n(\mathbb{R})) \\
A &\mapsto (S \mapsto {}^tASA)
\end{aligned}$$

On vérifie aisément que G est bien définie (on a même $\rho(A)^{-1} = \rho(A^{-1})$) et qu'il s'agit d'un morphisme de groupes [1]. De plus ρ est une application continue car égale à la restriction de la composée $b \circ d$ à G où $b : (A, B) \mapsto (S \mapsto {}^tASB)$ est une application bilinéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ dans $\mathcal{L}(S_n(\mathbb{R}), \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ (continue par dimension finie) et où $d : A \mapsto (A, A)$ se passe de commentaires.

Posons $H := \{\,{}^tMM \,|\, M \in G\}$. On vérifie aisément que K est un compact non vide du convexe $S_n(\mathbb{R})$ et donc par théorème de Caratheodory $K := \mathrm{conv}(H)$ est un compact convexe non vide de $S_n(\mathbb{R})$. De plus, $\mathcal{G} := \rho(G)$ est un sous–groupe (car ρ est un morphisme de groupes) compact (car ρ est continue et G compact) de $GL(S_n(\mathbb{R}))$. Enfin, si $A \in G$ et $M \in G$ on a :

$$\rho(A)({}^tMM) = {}^tA{}^tMMA = {}^t(AM)(AM) \in K$$

Comme $\rho(A)$ est linéaire donc conserve les combinaisons convexes on a bien $\rho(A)(K) \subset K$ et donc K est G–stable.

On applique alors le lemme 1 qui nous donne l'existence de $S \in K$ tel que pour tout $A \in G$ on ait $\rho(A)(S) = S$, i.e ${}^tASA = S$. Comme de plus $K \subset S_n^+ + (\mathbb{R})$ on a bien $G \subset \mathcal{O}(q)$ où $q : x \mapsto {}^txSx$ est une forme quadratique définie positive.

1. ***Attention :*** n'oublions pas que nous avons modifié la structure de G !

Détails supplémentaires :

- *Cas où le groupe G est fini.* On définit le produit scalaire suivant sur $\mathbb{R}^n$:

$$\Phi : (x, y) \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{A \in G} \langle Ax, Ay \rangle$$

  Il est alors clair, la translation à droite par un élément donné de G étant bijective, que toute matrice de G est orthogonale pour Φ.
- *Cas d'égalité pour ν.* Le lemme suivant nous permet de conclure :

  Lemme 2
  Soient $x, y \in V$ tels que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.
  Alors il existe $\lambda \geq 0$ tel que $x = \lambda y$ (ou $y = \lambda x$).
  DÉMONSTRATION : Plaçons nous dans le cas où $\|x\| = \|y\| = 1$. Alors $\|x+y\| = 2$ par hypothèse et on a également $\|x+y\|^2 = 2 + 2\langle x, y\rangle$ donc $\langle x, y \rangle = 1 = \|x\|\|y\|$: on se trouve dans le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy–Schwarz. De fait, il existe $t \geq 0$ tel que $x = ty$ et comme $\|x\| = \|y\|$ on a nécessairement $t \in \{-1, 1\}$. Cependant, si $t = -1$ alors $\langle x, y \rangle = -1$, ce qui est absurde d'où $x = y$.
  Dans le cas général, pour x et y non nuls [2] On applique alors la proposition précédente à $\frac{x}{\|x\|}$ et $\frac{y}{\|y\|}$, ce qui nous livre le résultat pieds et poings liés avec $\lambda = \frac{\|x\|}{\|y\|}$.

Références

[Ale99] Michel Alessandri. *Thèmes de géométrie.* Dunod, 1999.

2. La preuve dans le cas où l'un est nul est laissée en exercice au lecteur. Ne me remerciez pas.