Théorème de Cauchy–Lipschitz global

Arnaud Girand

17 juin 2012

Référence :
- [Rou09], p. 180–184

Proposition 1 (Cauchy–Lipschitz global)
Soit $m \geq 1$ et soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^m$.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $f \in \mathcal{C}^0(I \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ globalement lipschitzienne selon la seconde variable, i.e :

$$\forall K \subset\subset I,\, \exists k > 0,\, \forall t \in I,\, \forall y, z \in \mathbb{R}^m, \quad \|f(t,y) - f(t,z)\| \leq k\|y - z\|$$

Soient $x \in \mathbb{R}^m$ et $t_0 \in I$.
On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = f(.,y) \\ y(t_0) = x \end{cases} \text{, d'inconnue } y \in E := \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^m) \tag{1}$$

Alors le problème (1) admet une unique solution globale.

Démonstration : Pour $y \in E$ et $t \in I$ on pose :

$$F(y)(t) := x + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

Remarquons que y est solution (globale) de (1) si et seulement si y est dérivable sur I et vérifie $y' = f(.,y)$ et $y(t_0) = x$. Comme f est continue, y est alors nécessairement $\mathcal{C}^1$ et vérifie :

$$\forall t \in I, \qquad y(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds = F(y)(t) \tag{2}$$

Réciproquement, si y est solution de (2) elle est dérivable et est solution de (1). On a donc ramené notre problème de Cauchy à une recherche de point fixe pour F sur E.

Commençons par supposer I compact. Soit alors k la constante de Lipschitz associée au compact I et soit $\ell := \sup(I) - \inf(I)$ la longueur de I. On munit E de la norme suivante :

$$\|.\|_k : y \mapsto \max_{t \in I}(e^{-k|t-t_0|}\|y(t)\|) = \|e^{-k|.-t_0|}y\|_\infty$$

On a alors :

$$\forall y \in E, \quad e^{-k\ell}\|y\|_\infty \leq \|y\|_k \leq \|y\|_\infty$$

De fait $\|.\|_k$ est équivalente $\|.\|_\infty$ sur E. En particulier, $(E, \|.\|_k)$ est un espace de Banach. De plus, comme F est continue l'application F envoie bien E sur lui–même. Également :

$$\forall y, z \in E,\, \forall t \leq t_0, \qquad F(y)(t) - F(z)(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) - f(s, z(s))ds$$

D'où :

$$\forall y,z\in E,\ \forall t\leq t_0,\qquad \begin{aligned}[t] e^{-k(t-t_0)}\|F(y)(t)-F(z)(t)\| &\leq e^{-k(t-t_0)}\int_{t_0}^{t}\|f(s,y(s))-f(s,z(s))\|ds\\ &\leq e^{-k(t-t_0)}\int_{t_0}^{t}k\|y(s)-z(s)\|ds\\ &= e^{-k(t-t_0)}\int_{t_0}^{t}ke^{k(s-t_0)}(e^{-k(s-t_0)}\|y(s)-z(s)\|)ds\\ &\leq e^{-k(t-t_0)}\int_{t_0}^{t}ke^{k(s-t_0)}\|y-z\|_k ds\\ &= e^{-k(t-t_0)}\|y-z\|_k(e^{k(t-t_0)}-1)\\ &= (1-e^{-k(t-t_0)})\|y-z\|_k \end{aligned}$$

On obtient exactement le même résultat pour $t\leq t_0$ en remplaçant $e^{-k(t-t_0)}$ par $e^{-k(t_0-t)}$, d'où :

$$\forall y,z\in E,\ \forall t\in I,\qquad e^{-k|t-t_0|}\|F(y)(t)-F(z)(t)\|\leq(1-e^{-k|t-t_0|})\|y-z\|_k\leq(1-e^{-k\ell})\|y-z\|_k$$

D'où, en "passant au max [1]" en t :

$$\forall y,z\in E,\qquad \|F(y)-F(z)\|_k\leq(1-e^{-k\ell})\|y-z\|_k$$

F est donc contractante ($0<1-e^{-k\ell}<1$) donc, par théorème du point fixe de Picard, admet un unique point fixe, ce qui résout notre problème.

Si on ne suppose plus I compact, on peut trouver une suite croissante d'intervalles compacts I_j, $j\in\mathbb{N}$ tels que :

$$I=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}I_j \text{ et } \forall j\in\mathbb{N},\ t_0\in I_j$$

Pour $j\in\mathbb{N}$ on note y_j la (cf. supra) solution de (1) sur I_j. Alors si y est solution de (1) sur I, par unicité sur les I_j on a nécessairement $y_{|I_j}=y_j$. Inversement, toujours par unicité sur les I_j, on peut "recoller" les y_j, i.e l'application $y:(t\in I_j)\mapsto y_j(t)$ est bien définie et dérivable. Elle est également solution de (1) sur I par exhaustivité de $(I_j)_j$ dans I, d'où le résultat.

Détails supplémentaires :

- Une $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ linéaire continue vérifie les hypothèses de ce théorème quitte à l'identifier à $(t,y)\mapsto f(y)$. On a alors une constante de Lipschitz "globale en t", à savoir la norme subordonnée (à $\|.\|$) de f :

$$\forall t\in I,\ \forall y,z\in\mathbb{R}^m,\quad \|f(t,y)-f(t,z)\|\leq\|f\|\|y-z\|$$

- Rappelons le résultat suivant :

  Proposition 2 (Picard)
  Soit E un espace de Banach.
  Soit F un evn.
  Soit A un fermé de E.
  Soit $f\in\mathcal{C}(A,F)$ contractante, i.e telle que :

$$\exists 0<k<1,\ \forall x,y\in A,\quad \|f(x)-f(y)\|\leq k\|x-y|$$

  Alors f admet un unique point fixe.
  Démonstration : L'unicité est claire : en effet, si x et y sont deux points fixes distincts de f on a :

$$\|x-y\|=\|f(x)-f(y)\|\leq k\|x-y\|<\|x-y\|$$

  D'où contradiction.

1. À consommer avec modération.

Pour démontrer l'existence, commençons par fixer $x_0 \in A$. Pour $n \geq 0$ on pose $x_{n+1} = f(x_n)$. Alors :

$$
\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|x_{n+1} - x_n\| &= \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \\
&\leq k\|x_n - x_{n-1}\| \\
&\ \vdots \quad \text{(par récurrence)} \\
&\leq k^n\|x_1 - x_0\|
\end{aligned}
$$

De fait :

$$
\begin{aligned}
\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad \|x_{n+p} - x_n\| &= \left\| x_{n+p} - \sum_{i=1}^{p-1} x_{n+i} + \sum_{i=1}^{p-1} x_{n+i} - x_n \right\| \\
&\leq \sum_{i=0}^{p-1} \|x_{n+i+1} - x_{n+i}\| \\
&\leq \sum_{i=0}^{p-1} k^{n+i}\|x_1 - x_0\| \\
&= k^n\|x_1 - x_0\| \sum_{k=0}^{p-1} k^i \\
&\leq k^n\|x_1 - x_0\| \sum_{k=0}^{+\infty} k^i \text{ la série } \sum k^i \text{ convergeant car } 0 < k < 1 \\
&= \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\| \\
&\xrightarrow[n \to \infty]{} 0
\end{aligned}
$$

La dernière majoration étant indépendante de p, la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans l'espace complet [2] A donc y converge vers un certain $x \in A$. En passant à la limite (par continuité – séquentielle – de f) dans la relation $x_{n+1} = f(x_n)$ on obtient que x est un point fixe de f d'où le résultat.

Références

[Rou09] François Rouvière. *Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation (3e édition).* Cassini, 2009.

2. Car fermé dans le complet E.