Théorème de Banach–Steinhaus

Arnaud Girand

17 juin 2012

Référence :
- [Gou08], p.404–406

Prérequis :
- théorème de Baire.

Proposition 1 (Banach–Steinhaus)
Soit E un espace de Banach et F un e.v.n.
Soit $H \subset \mathcal{L}_c(E,F)$. Alors soit $(\|f\|)_{f \in H}$ est bornée, soit il existe $x \in E$ tel que $\sup_{f \in H} \|f(x)\| = \infty$.

Démonstration : Pour $k \in \mathbb{N}$ on définit l'ensemble suivant :

$$\Omega_k := \{x \in E \mid \sup_{f \in H} \|f(x)\| > k\} \subset E$$

Montrons que Ω_k est ouvert. Si $x_0 \in \Omega_k$, il existe $f \in H$ telle que $\|f(x_0)\| > k$ donc par continuité de f il existe $\rho > 0$ tel que $\forall x \in \mathcal{B}(x_0, \rho)$, $\|f(x)\| > k$ et donc $\mathcal{B}(x_0,\rho) \subset \Omega_k$ d'où le résultat.

Nous distinguons à présent deux cas.

- *Cas 1 : les Ω_k sont* tous *denses dans E.* E est un espace métrique complet donc un espace de Baire, aussi le théorème éponyme nous livre-t-il :

$$\overline{\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k} = E$$

  En particulier, $\cap_k \Omega_k \neq \emptyset$ et si l'on se donne $x \in \cap_k \Omega_k$ on a :

$$\sup_{f \in H} \|f(x)\| = \infty$$

- *Cas 2 : $\neg$ (cas 1).* Il existe donc $k \geq 0$ tel que Ω_k ne soit pas dense dans E, i.e il existe $x_0 \in E$ et $\rho > 0$ tels que $\mathcal{B}(x_0,\rho) \cap \Omega_k = \emptyset$. De fait $\forall x \in \mathcal{B}(x_0,\rho)$, $\sup_f \|f(x)\| \leq k$, ergo :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{B}(0,\rho), \forall f \in H,\ \|f(x)\| &= \|f(x+x_0) - f(x_0)\| \\ &\leq \|f(x+x_0)\| + \|f(x)\| \\ &\leq 2k \end{aligned}$$

  Par continuité de f cette inégalité s'étend naturellement à $\overline{\mathcal{B}}(0,\rho)$. Soient donc $f \in H$ et $x \in E$ de norme 1. Alors :

$$\|f(x)\| = \frac{1}{\rho}\|f(\rho x)\| \leq \frac{2k}{\rho}$$

  D'où $\|f\| \leq \dfrac{2k}{\rho}$ et donc $(\|f\|)_{f\in H}$ est bornée, ce qui achève le théorème.

Corollaire 1.1
On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ le $\mathbb{C}$–e.v des fonctions continues 2π–périodiques à valeurs complexes, que l'on munit de la norme $\|.\|_\infty$ usuelle.
Pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ on définit :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \text{ et } \forall n \geq 0,\ S_n(f) : x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}$$

Alors il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ telle que $(S_n(f)(0))_{n\geq 0})$ diverge. En particulier, f n'est pas somme de sa série de Fourier.

Démonstration : On commence par définir la forme linéaire suivante (pour $n \geq 1$) :

$$\begin{aligned}\ell_n : \mathcal{C}_{2\pi} &\to \mathbb{C}\\ f &\mapsto S_n(f)(0) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\end{aligned}$$

Alors ℓ_n est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_{2\pi}$. En effet, si $f \in Cr_{2\pi}$ on a :

$$\begin{aligned}\ell_n(f) &= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt}dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)dt \text{ où } D_n : t \mapsto \sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt} = \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}\end{aligned}$$

De fait :

$$|\ell_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt\|f\|_\infty \text{ donc } \|\ell_n\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt$$

On définit ensuite pour $\varepsilon > 0$ l'application suivante :

$$\begin{aligned}f_\varepsilon : \mathbb{R} &\to \mathbb{C}\\ x &\mapsto \frac{D_n(x)}{|D_n(x)| + \varepsilon}\end{aligned}$$

$\|f_\varepsilon\|_\infty \leq 1$ et par convergence dominée on a :

$$|\ell_n(f_\varepsilon)| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt$$

De fait $\|\ell_n\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt$. En utilisant l'inégalité $|\sin(t/2)| \leq |t/2|$ on trouve alors :

$$\begin{aligned}\|\ell_n\| &\geq \frac{1}{pi}\int_0^{\pi} \left|\frac{\sin((n+1/2)t)}{t/2}\right| dt\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+1/2)\pi} |\mathrm{sinc}(t)|dt \text{ via } t \mapsto \frac{2}{2n+1}t\\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \text{ car } \int_0^{\infty} |\mathrm{sinc}(t)|dt \text{ diverge}\end{aligned}$$

L'espace $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|.\|_\infty)$ étant complet, le théorème de Banach–Steinhaus s'applique et implique qu'il existe $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ telle que :

$$\sup_{n\geq 0} S_n(f)(0) = \sup_{n \geq 0} \ell_n(f) = \infty$$

Donc $(S_n(f)(0))_n$ diverge.

Détails supplémentaires :

- *Sommons.* Soient $t \in \mathbb{R}$ et $n \geq 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt} &= \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} + \sum_{k=0}^{n} e^{-ikt} \\
&= \frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}} + e^{-it}\frac{1-e^{-int}}{1-e^{-it}} \\
&= \frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}} + \frac{1-e^{-int}}{e^{it}-1} \\
&= \frac{e^{i(n+1)t}-e^{-int}}{e^{it}-1} \\
&= \frac{e^{it/2}}{e^{it/2}}\frac{e^{i(n+1/2)t}-e^{-i(n+1/2)t}}{e^{it/2}-e^{-it/2}} \\
&= \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}
\end{aligned}$$

- *Sinus cardinal.* Soit $n \geq 1$. Alors :

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\mathrm{sinc}(t)|dt \geq \frac{1}{n\pi}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin(t)|dt \text{ car } t \leq n\pi$$

  Or par périodicité :

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin(t)|dt = \int_{0}^{\pi} |\sin(t)|dt = \int_{0}^{\pi} \sin(t)dt = -(\cos(\pi)-\cos(0)) = 2$$

  D'où :

$$\int_{0}^{n\pi} |\mathrm{sinc}(t)|dt \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

  Et donc $\int_{\mathbb{R}_+} |\mathrm{sinc}|$ diverge.

Références

[Gou08] Xavier Gourdon. *Analyse (2e édition).* Ellipses, 2008.