L'art et la manière de diviser par zéro

Arnaud Girand

ENS Cachan Bretagne

1er février 2013

On considère l'application suivante :

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \frac{1}{z}$$

☞ **Objectif :** *définir un prolongement holomorphe de f en 0.*

On considère l'application suivante :

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \frac{1}{z}$$

☞ **Objectif :** *définir un prolongement holomorphe de* f *en* 0.

Léger problème

✗ f n'est même pas prolongeable par continuité en 0 !

Élargissons nos horizons . . .

On considère l'application suivante :

$$g : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$$
$$[z_0 : z_1] \mapsto [z_1 : z_0]$$

Alors sur l'ouvert de carte $\{z_0 \neq 0\}$ on a :

$$g([z_0 : z_1]) = \left[\frac{z_1}{z_0} : 1\right]$$

Élargissons nos horizons . . .

On considère l'application suivante :

$$g : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$$
$$[z_0 : z_1] \mapsto [z_1 : z_0]$$

Alors sur l'ouvert de carte $\{z_0 \neq 0\}$ on a :

$$g([z_0 : z_1]) = \left[\frac{z_1}{z_0} : 1\right]$$

Élargissons nos horizons . . .

Alors sur l'ouvert de carte $\{z_0 \neq 0\}$ on a :

$$g([z_0 : z_1]) = \left[\frac{z_1}{z_0} : 1\right]$$

Ainsi, si $z \in \mathbb{C}^*$:

$$g([z : 1]) = \left[\frac{1}{z} : 1\right]$$

☞ *On a donc construit une application* $g : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ *holomorphe telle que* g *"coïncide" avec* f *sur un ouvert biholomorphe à* $\mathbb{C}^*$.

Élargissons nos horizons . . .

Alors sur l'ouvert de carte $\{z_0 \neq 0\}$ on a :

$$g([z_0 : z_1]) = \left[\frac{z_1}{z_0} : 1\right]$$

Ainsi, si $z \in \mathbb{C}^*$:

$$g([z : 1]) = \left[\frac{1}{z} : 1\right]$$

☞ *On a donc construit une application $g : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ holomorphe telle que g "coïncide" avec f sur un ouvert biholomorphe à $\mathbb{C}^*$.*

On prend les mêmes . . .

On considère l'application suivante, dans le même but que précédemment :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \end{aligned}$$

. . . et on recommence ?

L'application projective suivante coïncide avec f sur l'ouvert $\{x \neq 0\} \cap \{y \neq 0\} \cap \{z \neq 0\} \subset \mathbb{P}^2$:

$$g : [x : y : z] \mapsto [yz : xz : xy]$$

✗ *g n'est pas définie en* $[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0]$ *et* $[0 : 0 : 1]$ . . .

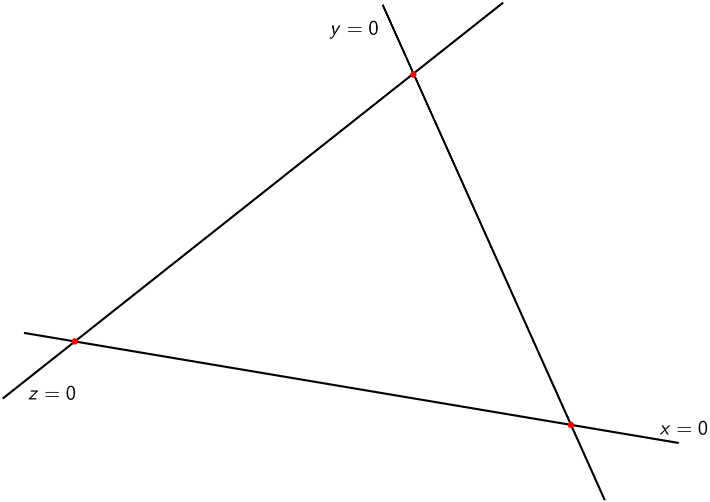
. . . et on recommence ?

L'application projective suivante coïncide avec f sur l'ouvert $\{x \neq 0\} \cap \{y \neq 0\} \cap \{z \neq 0\} \subset \mathbb{P}^2$:

$$g : [x : y : z] \mapsto [yz : xz : xy]$$

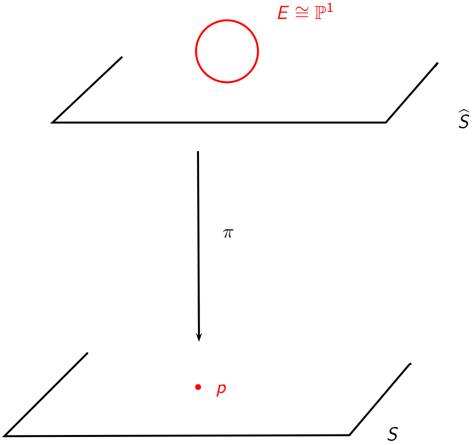
✗ *g n'est pas définie en* $[1:0:0], [0:1:0]$ *et* $[0:0:1]$ . . .

Cartographie des points à problèmes



Principe général

- On part d'une surface projective lisse pointée (S, p) ;
- on "éclate" le point p, i.e on le remplace par une courbe E (appelée *diviseur exceptionnel*) isomorphe à $\mathbb{P}^1$;
- on obtient ainsi une surface projective lisse $\widehat{S}$ et un morphisme $\pi : \widehat{S} \to S$ tel que :
  (i) $\pi(E) = \{p\}$;
  (ii) π réalise un isomorphisme de $\widehat{S} \setminus E$ sur $S \setminus \{p\}$.

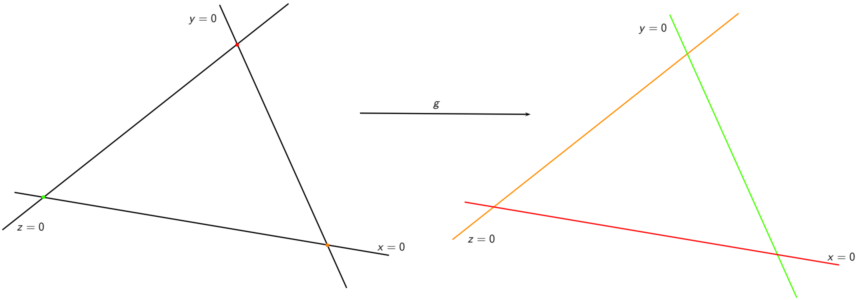

$E \cong \mathbb{P}^1$
$\widehat{S}$
π
p
S

Cartographie des problèmes, bis

On remarque que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*}$ et donc :

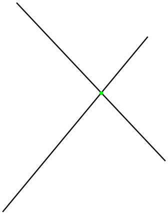
- $[1:0:0] = g^{-1}(\{x=0\})$;
- $[0:1:0] = g^{-1}(\{y=0\})$;
- $[0:0:1] = g^{-1}(\{z=0\})$.

Cartographie des problèmes, bis



Éclatons !

On éclate successivement chacun des points $[1:0:0]$, $[0:1:0]$ et $[0:0:1]$.

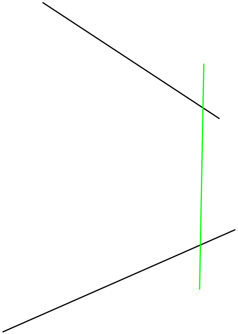


☞ Ceci nous donne une suite d'éclatements, que nous noterons π :

$$\mathbb{P}^2 \xleftarrow{\pi_1} \xleftarrow{\pi_2} \xleftarrow{\pi_3} \widehat{S}$$

Éclatons !

On éclate successivement chacun des points $[1:0:0]$, $[0:1:0]$ et $[0:0:1]$.

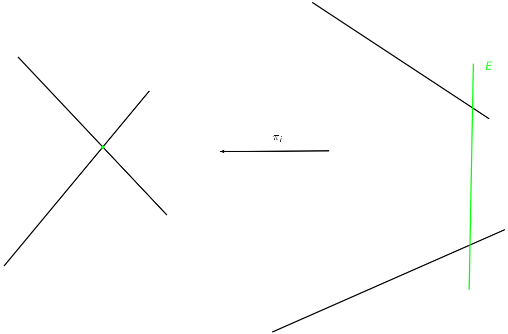


☞ Ceci nous donne une suite d'éclatements, que nous noterons π :

$$\mathbb{P}^2 \xleftarrow{\pi_1} \xleftarrow{\pi_2} \xleftarrow{\pi_3} \widehat{S}$$

Éclatons !

On éclate successivement chacun des points $[1:0:0]$, $[0:1:0]$ et $[0:0:1]$.

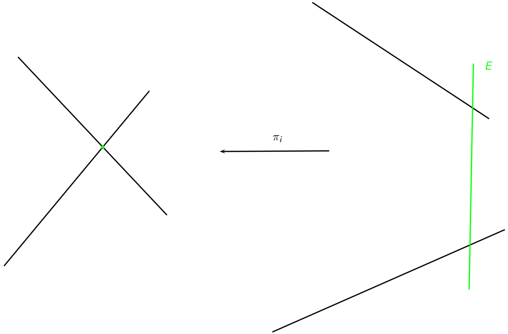


☞ Ceci nous donne une suite d'éclatements, que nous noterons π :

$$\mathbb{P}^2 \xleftarrow{\pi_1} \xleftarrow{\pi_2} \xleftarrow{\pi_3} \widehat{S}$$

Éclatons !

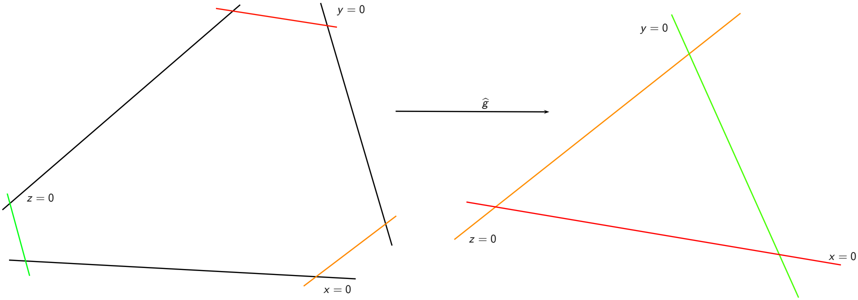
On éclate successivement chacun des points $[1:0:0]$, $[0:1:0]$ et $[0:0:1]$.



☞ Ceci nous donne une suite d'éclatements, que nous noterons π :

$$\mathbb{P}^2 \xleftarrow{\pi_1} \xleftarrow{\pi_2} \xleftarrow{\pi_3} \widehat{S}$$

Éclatons !



Pour les amateurs de diagrammes

$$\begin{tikzcd} & \widehat{S} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\widehat{g}"] & \\ \mathbb{P}^2 \arrow[rr, dashed, "g"'] & & \mathbb{P}^2 \end{tikzcd}$$

Pour aller plus loin

- Le théorème de Zariski nous dit que tout se passe bien sur $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$.
- L'étude des indéterminations peut fournir des indications sur la structure du groupe $Aut[\mathbb{A}_k^2]$ (théorème de Jung–Van der Kulk).
- Pour $n \geq 3$, il ne suffit plus des éclatements car les indéterminations peuvent être des courbes (ou pire). On ne connait pas d'analogue du théorème de Jung–Van der Kulk sur $Aut[\mathbb{A}_k^n]$.

Pour aller plus loin

- Le théorème de Zariski nous dit que tout se passe bien sur $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$.
- L'étude des indéterminations peut fournir des indications sur la structure du groupe $Aut[\mathbb{A}_k^2]$ (théorème de Jung–Van der Kulk).
- Pour $n \geq 3$, il ne suffit plus des éclatements car les indéterminations peuvent être des courbes (ou pire). On ne connait pas d'analogue du théorème de Jung–Van der Kulk sur $Aut[\mathbb{A}_k^n]$.

Pour aller plus loin

- Le théorème de Zariski nous dit que tout se passe bien sur $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$.
- L'étude des indéterminations peut fournir des indications sur la structure du groupe $Aut[\mathbb{A}_k^2]$ (théorème de Jung–Van der Kulk).
- Pour $n \geq 3$, il ne suffit plus des éclatements car les indéterminations peuvent être des courbes (ou pire). On ne connait pas d'analogue du théorème de Jung–Van der Kulk sur $Aut[\mathbb{A}_k^n]$.

Bibliographie

- Robin Hartshorne.
  Algebraic Geometry.
  Springer, 1977.
- Stéphane Lamy.
  Une preuve géométrique du théorème de jung.
  Enseignement Mathématique, 48, 2002.
- David Mumford.
  Algebraic Geometry I : Complex Projective Varieties.
  Springer, 1995.