Exercice 19 (éléments de correction)

– On s'intéresse à l'intégrale suivante :

$$I_6 := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^4+x^2+1} dx$$

On commence par remarquer que $X^4+X^2+1 = (X^2+X+1)(X^2+X+1)$. Ainsi si on pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ on a :

$$X^4+X^2+1 = (X-j)(X+j)(X-j^2)(X+j^2)$$

De fait, si on considère un chemin $\gamma_R = \gamma_R^1 \cup \gamma_R^2$ avec $\gamma_R^1(t) = t$ sur $[-R,R]$ et $\gamma_R^2(\theta) = Re^{i\theta}$ sur $[0,\pi[$ on a (faire un dessin pour se convaincre) :

$$I_6 = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{z^4+z^2+1} dz = 2i\pi \left(\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^4+z^2+1}, j\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^4+z^2+1}, -j^2\right)\right)$$

Les pôles en j et j^2 étant d'ordre 1, le calcul des résidus est aisé. On obtient :

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^4+z^2+1}, j\right) = \frac{1}{2j(j^2-j^4)} = \frac{1}{2j(j^2-j)} \text{ et } \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^4+z^2+1}, -j^2\right) = \frac{1}{2j^2(j^2-j)}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} 2i\pi \left(\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^4+z^2+1}, j\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^4+z^2+1}, -j^2\right)\right) &= \frac{i\pi}{(j^2-j)}\left(\frac{1}{j} + \frac{1}{j^2}\right) \\ &= \frac{i\pi}{(j^2-j)} \frac{j+1}{j^2} \\ &= i\pi \frac{j+1}{(j-1)j^3} \\ &= i\pi \frac{j+1}{j-1} \\ &= i\pi \frac{e^{i\frac{\pi}{3}} 2\cos(\pi/3)}{e^{i\frac{\pi}{3}} 2i\sin(\pi/3)} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{I_6 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.}$

– On souhaite à présent calculer l'intégrale :

$$I_7 := \int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^2+1} dx$$

On remarque que :

$$I_7 = \Re\left(\int_0^\infty \frac{e^{imx}}{x^2+1} dx\right) = \frac{1}{2}\Re\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{imx}}{x^2+1} dx\right)$$

L'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{imx}}{x^2+1} dx$ est calculable avec un chemin de type "ligne horizontale puis demi–cercle" (cf. I_6) :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{imx}}{x^2+1} dx = 2i\pi \mathrm{Res}\left(\frac{e^{imz}}{z^2+1}, i\right)$$

Car $z \mapsto \frac{e^{imz}}{z^2+1}$ admet des pôles simples en $\pm i$. Or :

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{imz}}{z^2+1}, i\right) = \frac{e^{-m}}{2i}$$

D'où :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{imx}}{x^2+1}dx = \pi e^{-m}$$

Et donc $\boxed{I_7 = \frac{\pi e^{-m}}{2}.}$

– Pour finir, calculons :

$$I_8 := \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(2\pi x)}{x^4+x^2+1}dx$$

Comme précédemment, on remarque que :

$$I_8 = \Re\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2i\pi x}}{x^4+x^2+1}dx\right)$$

Et :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2i\pi x}}{x^4+x^2+1}dx = 2i\pi\left(\mathrm{Res}\left(\frac{e^{2i\pi z}}{z^4+z^2+1}, j\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{e^{2i\pi z}}{z^4+z^2+1}, -j^2\right)\right)$$

En s'inspirant du calcul de I_6 on trouve alors :

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{2i\pi z}}{z^4+z^2+1}, j\right) = \frac{e^{2i\pi j}}{2j(j^2-j)} \text{ et } \mathrm{Res}\left(\frac{e^{2i\pi z}}{z^4+z^2+1}, -j^2\right) = \frac{e^{-2i\pi j^2}}{2j^2(j^2-j)}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} 2i\pi\left(\mathrm{Res}\left(\frac{e^{2i\pi z}}{z^4+z^2+1}, j\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{e^{2i\pi z}}{z^4+z^2+1}, -j^2\right)\right) &= \frac{i\pi}{(j^2-j)}\left(\frac{e^{2i\pi j}}{j} + \frac{e^{-2i\pi j^2}}{j^2}\right) \\ &= \frac{i\pi}{(j-1)}(je^{2i\pi j} + e^{-2i\pi j^2}) \end{aligned}$$

On remarque ensuite que :

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } -j^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} je^{2i\pi j} + e^{-2i\pi j^2} &= je^{-i\pi}e^{-\pi\sqrt{3}} + e^{i\pi}e^{-\pi\sqrt{3}} \\ &= -(je^{-\pi\sqrt{3}} + e^{\pi\sqrt{3}}) \\ &= -e^{-\pi\sqrt{3}}(j+1) \end{aligned}$$

In fine, $\boxed{I_8 = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-\pi\sqrt{3}}.}$

Exercice 20 (éléments de correction)

On considère la fonction suivante :

$$f : z \mapsto \frac{\ln(z)}{\sqrt{z}(1+z^2)}$$

Si on note $\Gamma = \gamma_1 \cap \gamma_2 \cap \gamma_3 \cap \gamma_4$ le lacet défini par :
- $\gamma_1 : t \mapsto t$ sur $[-R, -r]$;
- $\gamma_2 : \theta \mapsto re^{i\theta}$ sur $[0, \pi[$;
- $\gamma_3 : t \mapsto t$ sur $[r, R]$;
- $\gamma_4 : \theta \mapsto Re^{i\theta}$ sur $[0, \pi[$.

Les lemmes de Jordan nous affirment que $\int_{\gamma_2} f(z)dz, \int_{\gamma_4} f(z)dz \xrightarrow[R\to\infty,\, r\to 0]{} 0$. Intéressons nous de plus près aux deux autres chemins. On a, par intégrabilité :

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = \int_r^R f(z)dz \xrightarrow[R\to\infty,\, r\to 0]{} \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x^2)}dx = I_9$$

Sur $\mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}_-$, une détermination du logarithme est $\ln(z) := \ln(|z|)+i\arg(z)$ et donc $\sqrt{z} := e^{\frac{1}{2}\ln(z)} = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg(z)}{2}}$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} f(z)dz &= \int_{-R}^{-r} \frac{\ln(|x|)+i\pi}{i\sqrt{|x|}(1+x^2)}dx \\
&= -i\int_{-R}^{-r} \frac{\ln(|x|)+i\pi}{\sqrt{|x|}(1+x^2)}dx \\
&= -i\int_{r}^{R} \frac{\ln(x)+i\pi}{\sqrt{x}(1+x^2)}dx \text{ par parité} \\
&= -i\int_{r}^{R} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x^2)}dx + \pi\int_{r}^{R} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}dx \\
&\xrightarrow[R\to\infty,\, r\to 0]{} -iI_9+\pi I_10
\end{aligned}$$

Or la seule singularité de f à l'intérieur de Γ est un pôle d'ordre 1 en i. On a donc :

$$(1-i)I_9+\pi(I_10) = 2i\pi\mathrm{Res}(f,i)$$

Or :

$$\mathrm{Res}(f,i) = \frac{\ln(i)}{2i\sqrt{i}} = \frac{i\pi}{2}\frac{1}{2ie^{i\frac{\pi}{4}}}$$

D'où :

$$(1-i)I_9+\pi(I_10) = \frac{\pi^1}{2\sqrt{2}}(1+i)$$

Donc, en identifiant les parties imaginaires on trouve $\boxed{I_9 = -\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}}$. En identifiant les parties réelles on obtient :

$$I_9+\pi I_10 = \frac{\pi^1}{2\sqrt{2}}$$

D'où $\boxed{I_10 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.}$