Exercice 17 (éléments de correction)

2. On commence par poser :

$$I_1 := \int_{\Gamma_1} e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{it^2} dt$$
$$I_2 := \int_{\Gamma_2} e^{iz^2} dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{2i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta$$
$$I_3 := \int_{\Gamma_3} e^{iz^2} dz = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_R^0 e^{-v^2} dv = -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-v^2} dv$$

On remarque ensuite que :

$$I_1 = \int_0^R \cos(x^2)dx + i\int_0^R \sin(x^2)dx$$
$$\xrightarrow[R\to\infty]{} \int_0^\infty \cos(x^2)dx + i\int_0^\infty \sin(x^2)dx \text{ car les fonctions considérées sont intégrables sur } \mathbb{R}_+$$

Puis :

$$|I_2| = \left| iR \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin(2\theta)} e^{i(R^2\cos(2\theta)+\theta)} d\theta \right|$$
$$\leq |R| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin(2\theta)} d\theta$$
$$\xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \text{ par le 1.}$$

Ensuite :

$$I_3 = -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-v^2} dv \xrightarrow[R\to\infty]{} -\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Comme Γ est un chemin fermé (faire un dessin) le théorème de Cauchy nous affirme que :

$$\int_\Gamma e^{iz^2} dz = 0$$

Et donc en particulier :

$$\int_\Gamma e^{iz^2} dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Ainsi, par unicité de la limite :

$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx + i\int_0^\infty \sin(x^2)dx - \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = 0$$

Soit le résultat :

$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx = \int_0^\infty \sin(x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$