Exercice 3 (éléments de correction)

4. On commence par remarquer que :

$$\forall x \in [0,1], \quad \frac{1+x}{2} \leq 1$$

De fait, si on pose $f_n : x \mapsto \left(\frac{1+x}{2}\right)^n$ on a :
– les f_n sont continues par morceaux ;
– $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ p.p. sur $[0,1]$;
– $\forall x \in [0,1]$, $|f_n(x)| \leq 1$ et $g : x \mapsto 1$ est intégrable sur le *segment* $[0,1]$.
Ainsi, par convergence dominée :

$$\int_0^1 \left(\frac{1+x}{2}\right)^n dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

5. On définit la suite de fonction suivante (pour $n \geq 1$) :

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x} 1_{[0,n]}(x) \end{aligned}$$

Ces applications sont clairement continues par morceaux. De plus :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x} &= e^{n\ln(1+x/n)-\alpha x} \\ &= \exp\left(n\left(\ln\left((1+\frac{x}{n}\right) - \alpha\frac{x}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

Or $\left(\ln\left((1+\frac{x}{n}\right) - \alpha\frac{x}{n}\right) \leq 0$ (car $\forall u \geq 0, \ln(1+u) \leq u$), avec inégalité stricte si $x \neq 0$, donc in fine :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_+$ (car l'indicatrice a pour limite $1_{\mathbb{R}_+}$ p.p.). Enfin, comme $\forall u \geq 0, \ln(1+u) \leq u$, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x}\right| &= e^{n\ln(1+x/n)-\alpha x} \\ &\leq e^{n(x/n)-\alpha x} \\ &= e^{-(\alpha-1)x} \end{aligned}$$

Or $\alpha - 1 > 0$ donc $g : x \mapsto e^{-(\alpha-1)x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et donc, par convergence dominée :

$$\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x} dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Exercice 4 (éléments de correction)

1. Les fonctions g_n sont clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,n]$ et on a :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \forall x \in [0,n], \quad g_n'(x) &= \frac{n+1}{x-(n+1)} - \frac{n}{x-n} \\ &= \frac{x}{(x-(n+1))(x-n)} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Et donc g_n est croissante sur $[0,n]$. Or $g_n(0) = 0$ donc $g_n \geq 0$ sur $[0,n]$ ergo $\exp \circ g_n \geq 1$, i.e :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [0,n], \quad \exp\left((n+1)\ln\left(1-\frac{x}{n+1}\right) - n\left(1-\frac{x}{n}\right)\right) \geq 1$$

Soit :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [0,n], \quad \frac{(1-\frac{x}{n+1})^{n+1}}{(1-\frac{x}{n})^n} \geq 1$$

D'où le résultat.

2. La question 1. nous oriente clairement vers une utilisation du théorème de Beppo–Levi. On pose donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} 1_{[0,n]}(x) \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) &= \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} 1_{[0,n]}(x) \\ &\leq \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} e^{\alpha x} 1_{[0,n]}(x) \text{ d'après 1.} \\ &\leq \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} e^{\alpha x} 1_{[0,n+1]}(x) \\ &= f_{n+1}(x) \end{aligned}$$

La suite $(f_n)_n$ est donc croissante. De fait, par théorème de Beppo–Levi :

$$I_n(\alpha) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^\infty e^{(\alpha-1)x} dx = \begin{cases} +\infty \text{ si } \alpha \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha} \text{ sinon} \end{cases}$$

Exercice 5 (éléments de correction)

2. On commence par suivre bien gentiment l'indication :

$$I_2 = \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-((x-y/2)^2+3y^2/4)} dxdy$$

On applique alors le changement de variable $\varphi : (x, y) \mapsto (x - \frac{1}{\sqrt{3}}y, \frac{2}{\sqrt{3}}y)$, dont le jacobien est donné par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{Jac}(\varphi)(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Ainsi :

$$I_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

Cette dernière intégrale ne demande qu'à se faire passer en polaires, ce qui donne :

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty re^{-r^2} drd\theta \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \left(\int_0^\infty re^{-r^2} dr\right) \\ &= \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\infty \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$