1. On commence par remarquer que $A^3X = A(A(AX))) = 0$. Ensuite, comme $X \neq 0$ on a trouvé un vecteur non nul dans le noyau donc $\det(A) = 0$. XA et AX^3 n'on aucun sens et il est facile de trouver des contre–exemples pour les deux dernières propositions.
2. Soit λ une valeur propre de A et x un vecteur propre associé. Alors :
$$A^2x = A(Ax) = A\lambda x = \lambda^2 x$$
Or $A^2 = I_3$ donc $\lambda^2 = 1$, soit $\lambda = \pm 1$. De fait $\chi_A = -(T-1)^2(T+1)$ ou $-(T+1)^2(T-1)$. Comme 1 doit être de multiplicité 1 on a donc $\chi_A = -(T+1)^2(T-1) = (1-T^2)(T+1)$.
3. – Un simple calcul montre que seule A_1 est égale à son carré.
   – $\chi_{A_0} = -X(X-1)(X+1)$ est scindé simple, la matrice est donc diagonalisable.
   – On trouve :
$$\chi_{A_1} = -X^2(X-1) \qquad \text{et} \qquad \chi_{A_2} = -X(X-1)^2$$
Il n'y a plus ensuite qu'à regarder si les sous–espaces propres associés à 0 (pour A_1) et à 1 (pour A_2) sont de dimension 2.
4. On trouve $\chi_A = -X(X-2)^2$. En résolvant le système ad hoc, on trouve que 2 est de multiplicité géométrique 1 et donc A n'est pas diagonalisable.
5. On se place sur $\mathbb{C}$. On a donc vu que les valeurs propres de A^2 sont les carrés de celles de A. De fait, si on note λ et μ les deux "autres" (qui peuvent être égales à 1) valeurs propres de A on a :
$$\lambda + \mu + 1 = 0 = \lambda^2 + \mu^2 + 1$$
I.e $(\lambda+\mu)^2 = (-1)^2 = 1$, soit $\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu = 1$. Or $0 = \lambda^2 + \mu^2 + 1$ donc, *in fine* $\lambda\mu = 1$, ce qui implique que :
$$\det(A) = \lambda \times \mu \times 1 = 1$$
De fait, en multipliant la première équation par λ, on trouve $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$. De même, μ est également racine de $X^2 + X + 1$. On a donc nécessairement, comme $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$ que $\lambda = e^{2i\pi/3}$ et $\mu = e^{-2i\pi/3}$. Une seule des trois valeurs propres proposées est donc correcte.
6. – Si $A^2 = 0$, on a le contre–exemple suivant :
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   – Si $A^2 = -I_3$, χ_A n'est même pas scindé sur $\mathbb{R}$ (i et $-i$ sont valeurs propres de A).
   – Quitte à passer sur $\mathbb{C}$ on sait que les valeurs propres (complexes) de A^2 sont les carrés de celles de A. Ainsi, toutes les valeurs propres de A sont distinctes *et réelles* : A est bien diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
   – Si $A^3 = I_3$ on a un contre–exemple :
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
En effet, $\chi_A = X^3 - 1$ n'est même pas scindé sur $\mathbb{R}$.
   – Les valeurs propres complexes de A sont nécessairement $1, 0$ et une racine cubique de -1. Or la trace de A est égale à la somme de ses valeurs propres et est réelle. La seule possibilité pour la dernière valeur propre est donc -1 et donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
   – On a un contre–exemple (on vient bien que le noyau de A est de dimension 1) :
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$